

教育部國民及學前教育署「國民中小學課程推動工作－課程與教學輔導組」數學領域輔導群

# 111 學年度數學領域輔導群「中區座談會」

## 研 習 手 冊

指導單位：教育部國民及學前教育署

主辦單位：國立臺灣師範大學數學教育中心

協辦單位：臺中市數學輔導團

日期：112 年 3 月 17 日(五)

# 目 錄

中區座談會議程表	1
JDM 數學教師專業發展四階段模式	3
廿一世紀八大思考素養	5
林原宏教授 比面積還是比周長	9
秦爾聰副教授 拼板遊戲與畢氏定理	51
黎懿瑩教師 求面積與創造力	107
侯雪卿教師 尋三角形分類的系統性思維	135
張煥泉教師 統整三角形分類促進反思思考素養	171
林柏寬教師 當圓形遇上三角形	189
劉建成教師 挑戰俄羅斯輪盤	209
教學影片二維碼	229



111 學年度數學領域輔導群「中區座談會」

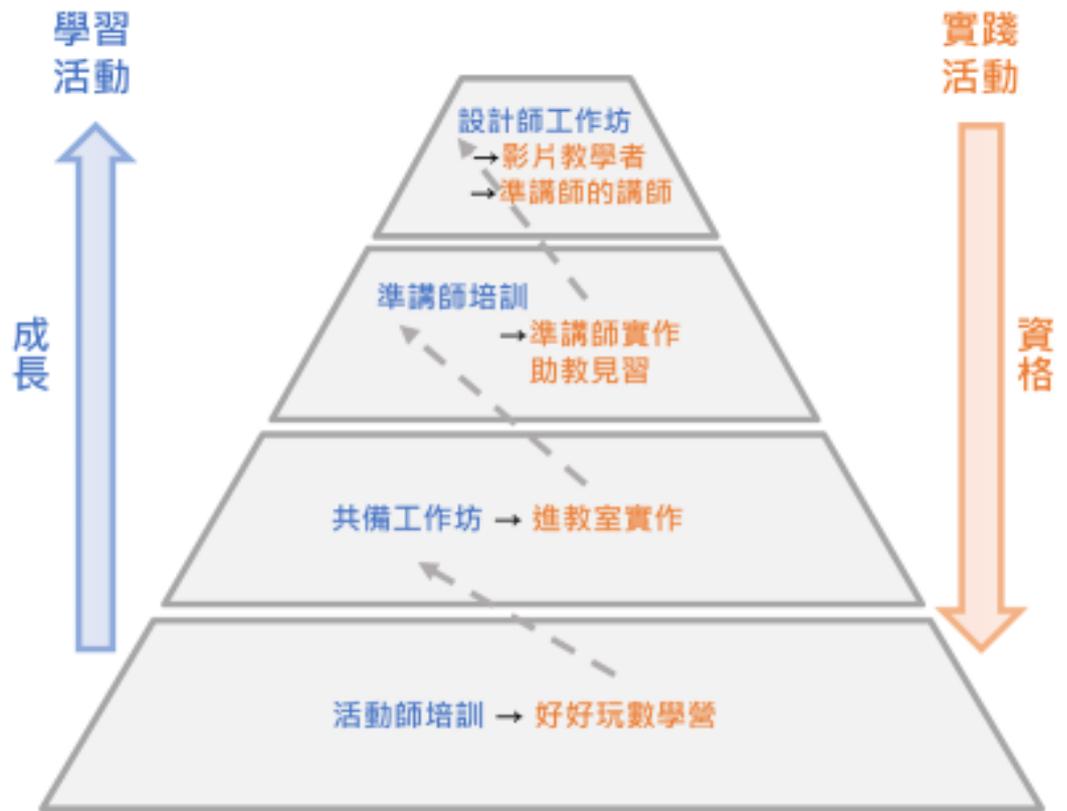
總召集人	林福來名譽教授（國立臺灣師範大學）				
組長	林柏寬教師（中央課程與教學輔導諮詢教師／臺南市永康國中）				
副組長	侯雪卿教師（中央課程與教學輔導諮詢教師／嘉義縣大同國小）				
參與縣市	主辦縣市	地點	日期	中區輔導群委員	中央團教師
臺中市、彰化縣 南投縣、苗栗縣 新竹市	臺中市	大甲 靜思堂	112 年 3 月 17 日 星期五 (9:00-16:00)	林福來名譽教授、 林原宏教授、秦爾聰教授、 游自達教授、劉祥通教授、 郭換枝委員	林柏寬、侯雪卿 阮正誼、黎懿瑩 張煥泉、劉建成 賴佩伶

— 議程表 —

時 間	活動與議題	主持人/分享人		場地
09:00-09:20	報到	承辦單位/ 臺中市國教輔導數學領域輔導小組		國議廳
09:20-09:30	開幕 貴賓致詞	主持人/ 國立臺灣師範大學 林福來名譽教授 貴賓/ 臺中市政府教育局 郭明洲主任秘書 臺中市立日南國中 鄭清峰校長 臺中市立陳平國小 胡志道校長 大甲靜思堂 周玉霜師姐		
09:30-12:00	21 世紀素養教學 案例分析	<b>比面積還是比周長、拼板遊戲與畢氏定理</b> 主持人/ 國立臺灣師範大學 林福來名譽教授 與談人/ 國立臺中教育大學 林原宏教授 國立彰化師範大學 秦爾聰教授		
12:00-12:50	午餐休息			
12:50-13:40	素養微課程&評量	國立臺灣師範大學 謝豐瑞教授		
13:40-13:50	休息(換場地)			
13:50-15:30	分組	國小組(小中/小高)		國中組
		知足教室	感恩教室	國議廳
	21 世紀素養 教學與評量 (素養微課程共備)	求面積與創造力	1. 三角形分類的 系統性思維 2. 統整三角形分類 促進反思思考素養	《獨立探索學具》 1. 當圓形遇上三角形 2. 挑戰俄羅斯輪盤
		林原宏教授 劉祥通教授	游自達教授 郭換枝教師	秦爾聰教授
	講師/黎懿瑩教師 助教/阮正誼教師	講師/侯雪卿教師 講師/張煥泉教師	講師/林柏寬教師 講師/劉建成教師 助教/賴佩伶教師	
15:30-15:40	休息(換場地)			
15:40-16:00	綜合座談	國立臺灣師範大學 林福來名譽教授		
16:00	賦歸			



JDM  
數學教師專業發展四階段模式





# 廿一世紀八大思考素養



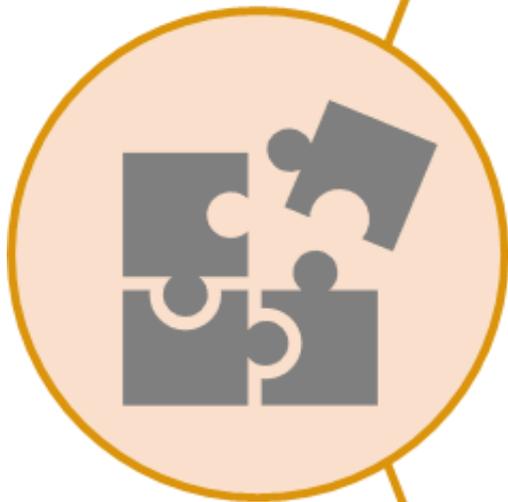
## 資訊使用

- 模擬操作
- 探究實驗
- 反思溝通



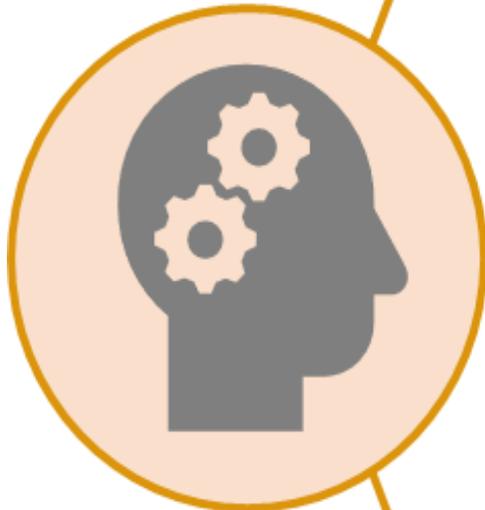
## 研究與探究

- 提想法
- 做試驗
- 下結論



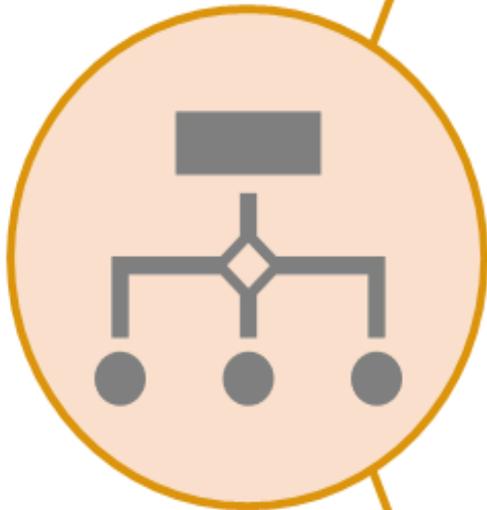
## 創造力

- 流暢性
- 變通性
- 獨創性



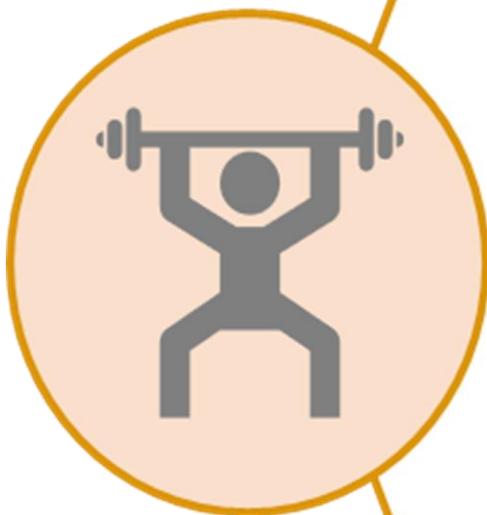
## 批判性思考

- 察覺矛盾
- 說理反駁
- 判斷有效性



## 系統性思維

- 找元素
- 找關係
- 建系統



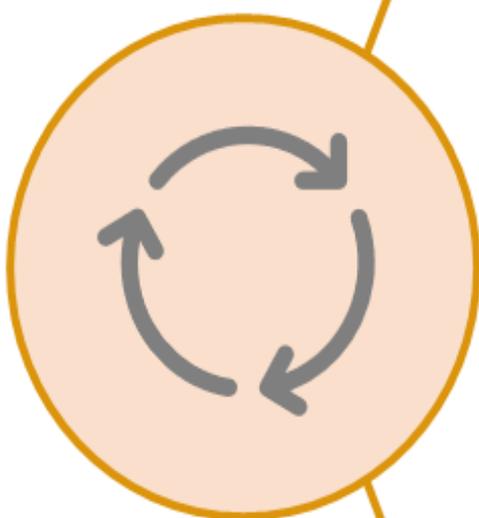
## 自主堅持

- 自主導向
- 自動自發
- 堅持不懈



## 溝通

- 釐清想法
- 調整想法
- 統整想法



## 反思

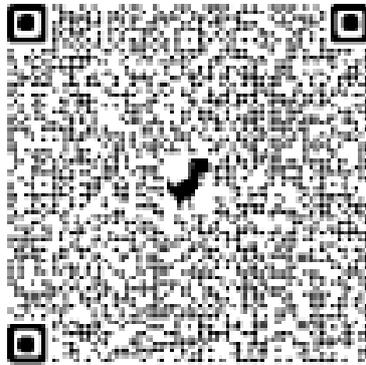
- 事件描述
- 詮釋了解
- 批判評鑑

〔國小〕

空間與形狀

平面圖型形狀、面積與周長關係

〈比面積還是比周長〉



<https://www.youtube.com/watch?v=iIN2F96TrWE>

# 奠基進教室模組共備包—比面積還是比周長

整理者：臺中市松竹國小黃秀玉

## 一、與教學模組深交

活動設計，教師以《牛皮圈地畫地》傳說故事觸發學習動機，並由圈地的故事情節，引起學生的好奇心，激發學童操作平方公分板進行學習活動，透過學生在活動中的記錄，教師提出問題引動學生進行有系統的觀察、探究以及歸納，歸納出等積異形、等面積不等周長、等周長面積，等面積時圖形排成細線周長會最長、聚集在一起其周長會最長等概念，並進行反思，進而澄清迷思概念、深化學習。

**【引起動機】：**《牛皮圈地畫地》傳說故事，引起學生學習動機

**【奠基連結的單元目標】：**《牛皮圈地畫地》的傳說故事，學生想法產生不一致，觸發探究之學習動機。

教學流程	關鍵提問(操作/情境)	原來模組活動中的素養	增補(修正) 操作或提問	增補或修正後活動中的素養
說故事起習動	0-1 用很多金銀財寶跟你換這麼大塊的地，如果是你會不會換？	情緒分享	如果是你，會不會換？你的理由是什麼？	語言演化 情緒分享
	0-2 我把那個牛皮剪開，剪成一條很長很長的細線，3000 公尺的細線，然後他說用那條細線來圍地，那個答應他的台灣人就後悔啦。	情緒分享	(1) 需要準備一張紙，示範台灣人以為是把這張紙蓋住之後的土地，而荷蘭人是把紙剪成細線(老師示範剪開紙張但不要斷掉)，然後利用細線紙張圍出來一塊土地。 (2) 以台灣人的角度討論，為什麼原來是開心地答應，但後來卻後悔了？哪裡跟他以為的不一樣？ (3) 以荷蘭人的角度討論，荷蘭人在打什麼主意，為什麼這樣他可以獲得好處？ (4) 整塊牛皮和剪開成的長長細線，有什麼相同和不同？(牛皮覆蓋地和牛皮線圈地，會有什麼差別？) (5) 荷蘭人這樣做，和原先約定的有沒有一樣？說說你的看法？ (6) 如果你是那個台灣人，你	知數能學 語言演化 情緒分享

				會怎麼跟和荷蘭人談判，以維持原來的約定？	
引動 思考	0-3 我想要用這條繩子來圍一塊地，你覺得不管老師怎樣圍，所圍出來的地都會一樣大嗎？	0-3-1 面積會一樣大，因為他們的那些線都一樣長。 0-3-2 面積會不一樣大，因為形狀不同，所以大小也不同。	語言演化 情緒分享	(1) 你說的是相同的繩長，會因為圍出的形狀不一樣，它的面積大小就會不一樣是嗎？ (2) 想一想，前面的《牛皮圈地畫地》故事，老師拿出的繩子，可不可能變得更長呢？	語言演化 情緒分享
	0-4 等一下來上課，操作看看，圍出來的地會不會一樣大？		語言演化	我們要探討『形狀』不同或相同時，『面積大小』以及「所圍的周長」的關係。	情緒分享



**【活動一】：拼鋪高手**

**【奠基連結的單元目標】**：透過拼排等面積的圖形，穩固「周長」與「面積」概念、發現等積異形、等面積不一定等周長。

程序	關鍵提問(操作/情境)	原來模組活動中的素養	增補(修正) 操作或提問	增補或修正後活動中的素養	
遊戲規則說明	1-1 兩個互為翻轉圖形，你覺得一樣的舉手。來，為什麼你覺得一樣，誰可以告訴我。	語言演化	以排好的積木(原圖、原圖旋轉或翻轉)示範。 學生實物觀察後，討論旋轉或翻轉後的圖是否可以得分？為什麼？	知數能學 語言演化 情緒分享	
遊戲示範	1-2 周長剛剛數 8 段，那面積呢？	知數能學	(1) 周長數 8 段的方法還有其他的方法嗎？ (2) 有沒有更快的數法？	知數能學 語言演化	
澄清周長與面積概念	1-3 周長跟面積指的是什麼？誰可以比給大家看？	知數能學 語言演化	(1) 台灣人一開始以為荷蘭人要用哪一種方式來取得土地？(用覆蓋的) (2) 荷蘭人想要用哪一種方式來圍地？(用線圍的) (3) 兩種方式一樣嗎？ ➤ 了解概念上的差異後，再介紹數學上的名詞「周長」和「面積」。	知數能學 語言演化	
作圖與記錄	1-4 將自己所拼出圖形的面積與周長記錄下來	知數能學	除了記錄所拼出圖形的面積與周長外，也把圖形畫出來	知數能學	
學生覺察	1-5 請小組討論，在剛才的遊戲中，你發現了什麼秘密？	1-5-1 擲到的點數愈多，可以排的圖形愈多。	知數能學 語言演化	(1) 你的證據或是依據在哪？ (2) 其他組是不是也有同樣的發現？	知數能學 語言演化
		1-5-2 我們骰出的數字是 6，面積全部都是 6，可是我們周長有很多都是一樣的，可是有少數的都是不一樣的。	知數能學 語言演化	(1) 擲出數字是 6 的這一組，你們有排出哪些不同的組合？ (2) 把每一組擲的骰子數和它排出的圖形數量寫在黑板上，看看是不是真的。 (3) 引導學生打破一局的範圍，從整張紀錄單中，看看有什麼發現。	知數能學 語言演化

				<ul style="list-style-type: none"> <li>整張的紀錄單有機會發現：相同的周長但面積不同。</li> </ul>	
1-6 在這個遊戲中，你學到了什麼？	1-6-1 面積一樣，可以找到不一樣的形狀。	知數能學 語言演化			
	1-6-2 面積一樣，可以找到不一樣的周長。	知數能學 語言演化			



**【活動二】：周長密碼**

**【奠基連結的單元目標】**：小組合作，找出指定面積周長最長或最短之圖形，發現面積相同時，愈接近正方形，其周長會最短；越細長(短邊為1段)之長方形，其周長會最長，覺察面積與周長之關係。

程序	關鍵提問(操作/情境)	原來模組活動中的素養	增補(修正) 操作或提問	增補或修正後活動中的素養
遊戲規則說明	2-1 抽出面積為幾片，比周長最長或最短之籤、作圖、記錄、揭露比較、形成共識。			
討論、作圖與記錄	2-2 將小組討論出的最佳圖形畫出來，並寫出此圖形的面積與周長。	知數能學 語言演化 情緒分享		
診斷式評量	2-3 請小組揭示討論結果，相互檢核與澄清。 所以 18 對不對？還是 19？不記得了，好，那這樣子我們看你從哪裡數，你要從哪一個開始數？	知數能學 情緒分享	(1) 我們要檢核什麼？ (2) 不記得了，那我們重來一次，不過這次要用什麼辦法讓我們知道是從哪裡開始的？ (3) 大家好像在數周長時很容易數錯，你們覺得問題在哪裡？ (4) 怎麼樣可以幫助我們不會數錯？ (5) 還有其他的方法可以找出周長嗎？ (6) 有沒有不容易數錯，且更快的方法？	知數能學 語言演化 情緒分享
學生覺察	2-4 我們剛剛發現面積 10 片，最長的周長是 22 段。	知數能學	(1) 圖形不一樣，為什麼周長都是 22 呢？ (2) 周長 22 一定是最長的嗎？有沒有人可以排出比 22 長的？ (3) 為什麼周長 22 會是最長的呢？ (4) 請觀察周長 22 的圖形，它的圖形長怎樣？	知數能學 語言演化

				(5) 說說看，它的邊相鄰的情形是怎樣的？	
2-5 周長每一組都是 14 段，然後面積也都是 11 片。				(1) 圖形不一樣，為什麼周長都是 14 呢？ (2) 周長 14 一定是最短的吗？有沒有人可以排出比 14 短的？ (3) 為什麼周長 14 會是最短的呢？ (4) 請觀察周長 14 的圖形，它的圖形長怎樣？ (5) 說說看，它的邊相鄰的情形是怎樣的？	知數能學 語言演化
2-6 面積一樣，你如何找到周長比較長或周長比較短的圖形？ 面積一樣，你如何找到周長比較短的圖形？	2-6-1 要凸出來才會有多的周長。	知數能學 語言演化		➤ 你可以排出二個圖形當作例子來說明給我們聽嗎？	知數能學 語言演化
	2-6-2 如果你是比較長的話，你就把全部的拼成一條直線。然後，如果是比短的話，你就把他全部集中在一個方塊裡面。	知數能學 語言演化		(1) 有沒有人可以，用自己的說法，把剛才的意思再講一次？ (2) 周長要比較長的排法，要直線，很像什麼圖形？(細長的長方形) (3) 周長要比較短的排法，要集中，很像什麼圖形？(正方形)	知數能學 語言演化 情緒分享
2-7 所排出的圖形，邊邊相鄰的數量多，它的周長會怎樣？你怎麼知道的？	邊邊相鄰的數量多，它的周長會比較短，因為全部聚集在一起以後，裡面有些會算不到。	知數能學 語言演化			
2-8 所排出的圖形，邊邊相鄰的數	邊邊相鄰的數量少，它的周長會比較長。 那個邊邊相鄰的	知數能學 語言演化		(1) 所以你的意思是聚在一起的圖形，周長會比較小嗎？ (2) 你可以排出二個圖形當	知數能學 語言演化

	<p>量少，它的周長會怎樣？你怎麼知道的？</p>	<p>數量比較多，因為他是一個一個黏在一起，不像比較少的，如果是比較少的話，他是會有很多間隔出來的。所以他算就會算比較多。</p> <p>如果是邊邊相鄰周長就少了，因為他集中在一起？然後中間那些都是不會算到，然後它的數量就會比較少。</p>		<p>作例子來說明給我們聽嗎？</p>	
<p>2-9 請你用你的紀錄單，跟你的剛剛遊戲的經驗，你覺得面積和周長有什麼關係？好，面積一樣，可以找到什麼？你怎麼知道的？</p>	<p>面積一樣，可以找到不同(形狀)的圖形。 因為面積都是5，周長是12，可是它們的形狀不一樣。</p>		<p>知數能學 語言演化</p>		
	<p>面積一樣，可以找到周長不一樣的圖形。 因為第4個圖形跟第1個圖形，周長不一樣，可是面積一樣。</p>		<p>知數能學 語言演化</p>	<p>(1) 說說看，你發現了什麼？ (2) 面積一樣，圖形的周長也會一樣，對還是錯？請舉例說說看。 (3) 面積和周長都一樣，圖形一定一樣，對還是錯？請舉例說說看。 (4) 請用自己的說法，把剛才的意思再講一次？</p>	<p>知數能學 語言演化</p>
<p>2-10 所以周長一樣，面積一樣，圖形的形狀不一定一樣對不對？你怎麼知道的？</p>		<p>因為第11個圖形跟第12個圖形，面積都是5，周長是12，可是它們的形狀不一樣。</p>	<p>知數能學 語言演化</p>		

【延伸活動】：佔地圍王(此部份沒有在影片中呈現)

【奠基連結的單元目標】：透過扣條圍出等周長的圖形，穩固「周長」與「面積」概念、等周長可以圍出不同形狀的圖形，等周長的圖形不一定等面積、相同周長的扣條圍成愈接近正方形其所圍出的面積愈大。

程序	關鍵提問(操作/情境)	原來模組活動中的素養	增補(修正) 操作或提問	增補或修正後活動中的素養	
遊戲規則說明	3-1 每次投 2 顆骰子(骰子點數為 2-7)，將 2 顆骰子上的數字加起來，取相同數量的扣條，排出封閉圖形，其餘規則與拼鋪高手相同。 若圍出面積大於或等於此回合出現之最大面積，則再得 1 分。		現在讓我們一起來想想剛剛「牛皮圍地畫地」的故事，你覺得不管老師怎樣圍，所圍出來的地都會一樣大嗎？ (1) 如果以 12 段做為牛皮剪成的細線，請你在方格紙上圍出土地，並畫出所圍圖形。 (2) 以 20 段做為牛皮剪成的細線，可以圍出多大的土地呢？有哪些可能呢？	知數能學 語言演化	
學生覺察	3-2 請小組討論，在剛才的遊戲中，你發現了什麼秘密？	3-2-1 若兩顆骰子點數和是奇數，則無法圍出封閉圖形。	知數能學 語言演化	各組的紀錄表同時呈現。說說看，你發現了什麼？	語言演化 情緒分享
		3-2-2 若兩顆骰子點數和是偶數，則可以圍出許多不同形狀的圖形。	知數能學 語言演化	(1) 所以為什麼台灣人後悔了？荷蘭人開心了？ (2) 如果你是那個台灣人，你要怎麼跟荷蘭人辯論，不上他的當？	語言演化 情緒分享
		3-2-3 扣條方方正正圍，所圍出來的面積比較大。	知數能學 語言演化	(3) 你的想法跟上課前有什麼相同或不同的地方？	語言演化 情緒分享
3-3 在這個遊戲中，你學到了什麼？	3-3-1 相同周長，可以圍出不一樣形狀的圖形。	知數能學 語言演化	(1) 你在這堂課學到了什麼？ (2) 上這堂課，你的心情如何？	知數能學 語言演化 情緒分享	
	3-3-2 相同周長，可以圍出不一樣面積的圖形。	知數能學 語言演化			

		3-3-3 相同周長，圍出細長形面積比較小，圍出方方正正面積比較大。	知數能學 語言演化		
		3-3-4 故事中用同一條牛皮繩圍地，面積和形狀都可能不同，圍成方方正正面積會比較大。。	知數能學 語言演化		
統整後系統性表達	如果你要跟其他人分享你今天 在遊戲中的發現，你能不能把發現排給他看，並說明呢？ 請你當一位小老師，將今天的發現，教會一個今天不在我們班課堂上的同學或朋友。		知數能學 語言演化 情緒分享		

## 二、教學模組融入我的教學

(一) 如何使用？什麼時候用？

正式課程	課程內容	模組使用
三上	認識周長、圖形的周長、畫出圖形	【牛皮圈地故事】激發學習動機 【活動1】拼鋪高手來取代 【延伸活動】佔地圍王來取代
三下	認識面積和平方公分(含等積異形)	【牛皮圈地故事】激發學習動機 【活動1】拼鋪高手來取代
四下	正方形和長方形的周長與面積公式	【牛皮圈地故事】激發學習動機 【活動1】拼鋪高手進行奠基
	周長與面積的關係 (含等周長不等面積、等面積不等周長)	【活動1】拼鋪高手來取代 【延伸活動】佔地圍王來取代 【活動2】周長密碼進行延伸學習
	複合圖形的面積	【活動1】拼鋪高手可延伸 【活動2】周長密碼進行延伸學習

1. 【三上】第9單元周界和周長

9-1 認識周界、內部和外部

1 丟花片遊戲。

用粉筆在地上畫一個圓圈，每個人輪流丟花片，把花片完全丟進圓圈裡的可以得2分，丟在圓圈上的得1分，丟在圓圈外面的不得分。



1 有3個花片丟在圓圈上，得幾分？  
有5個花片完全丟進圓圈裡，得幾分？

2 圓圈可以有缺口嗎？為什麼？



不可以。有缺口就無法判斷花片在圓圈裡或圓圈外。

周界：外部：內部：

這個圓形沒有缺口，所以藍色線的部分就是圓的周界，圓圈裡的面叫作內部，圓圈外面的面叫作外部。



110 配合習作第98頁

2 下面哪些圖形有周界？用紅筆描出它們的周界，並在圖形的內部塗上其他顏色。



1 什麼樣的圖形才有周界？

沒有缺口的圖形才有周界。



2 有缺口的圖形，能不能區分內部和外部？

練習一下

下面兩個圖形，哪一個有周界、內部和外部？在( )裡打✓，並用紅筆描出周界。

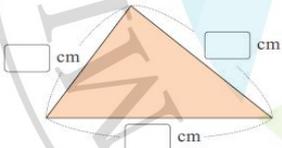


給老師的建議 在本活動後，讓學生回顧華光頁的電腦並解題。

配合習作第98頁 111

9-2 認識周長

1 量量看看，三角形每一邊有多長？把它記錄下來。



三角形周界的長度是幾公分？

$4 + 5 + 6 =$  \_\_\_\_\_

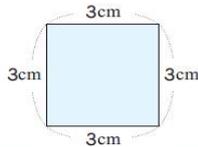


把三角形3個邊的長度加起來，就是周界的長度。



周界的長度叫作周長。

2 這個正方形周長是幾公分？你是怎麼算的？



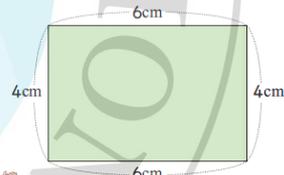
正方形的每一邊都是3公分，用  $3+3+3+3=12$  就能算出周長。

正方形的每一邊都是3公分，有4個邊，用  $3 \times 4 = 12$  也能算出周長。

112 配合習作第99~101頁

給老師的建議 本活動是透過圖示計算正方形和長方形的周長，而正方形和長方形的周長公式會在四年級介紹。

3 這個長方形周長是幾公分？你是怎麼算的？



將長方形的每個邊相加，就能算出周長。



長方形相對的邊一樣長，先將長邊  $\times 2$ ，寬邊  $\times 2$ ，再相加，也能算出周長。

還有其他算法嗎？

練習一下

量量看看，算出下面圖形的周長是幾公分？

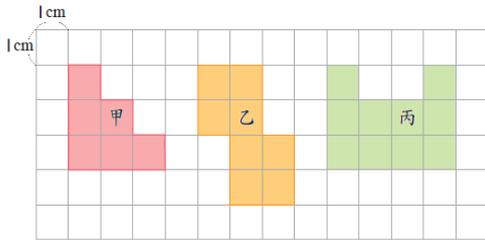


112 配合習作第99~101頁

配合習作第99~101頁 113

### 9-3 圖形的周長

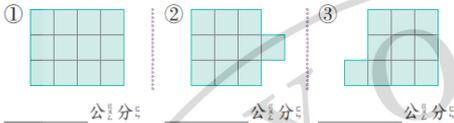
- 1 下圖中，每個小方格的邊長都是1公分。算算看，下面圖形形的周長各是幾公分？



甲：( ) cm 乙：( ) cm 丙：( ) cm

#### 練習一下

- (1) 下面小方格的邊長是1公分，算算看，圖形形的周長各是幾公分？



- (2) 哪些圖形和左圖正方形形的周長一樣長？圖圖看。

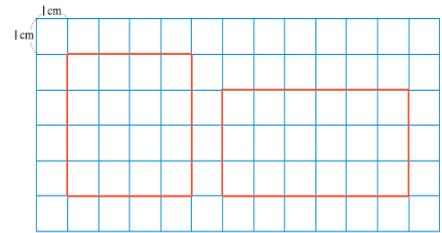


114 配合習作第 102 頁

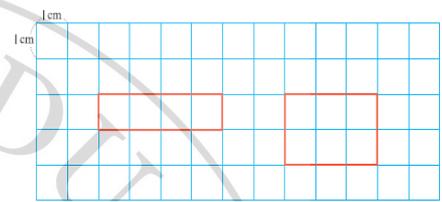
### 9-4 畫出圖形

- 1 下圖中，每個小方格的邊長都是1公分。(配合附件P41)

- 1 在方格紙上，沿著格線畫出每邊長4公分的正方形形和長邊6公分、寬邊3公分的長方形形。



- 2 在方格紙上，沿著格線畫出周長是10公分的長方形形。



繪圖師 教師指導學生小時，可提醒學生先畫1個1公分的寬邊，之後的寬邊上下同時增加1公分，逐步增加到長邊是10公分。

配合習作第 103 頁 115

## 【三上】第9單元周界和周長

### ➤ 教學目標：

- (1) 認識平面圖形的內部、外部及其周界。

(1-1) 透過遊戲，認識平面圖形的內部、外部及其周界。

(1-2) 透過著色活動，分辨平面圖形的內部、外部及其周界。

- (2) 能認識周長，並實測周長。

(2-1) 透過操作，認識並點數平面圖形的周長。

(2-2) 能透過連加和乘法來計算周長。

(2-3) 能實測平面圖形的邊長，並透過連加和乘法來計算周長。

(2-4) 能用指定長度的線畫出正方形和長方形。

➤ 在【9-2 認識周長】課程前，以牛皮圈地故事激發學習動機。

➤ 【活動1】拼鋪高手來取代【9-3 圖形的周長】。

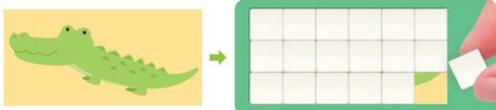
➤ 【延伸活動】佔地圍王來取代【9-4 畫出圖形】。

➤ 課本命題則當作形成性評量。

## 2. 【三下】第4單元面積

### 4-1 認識面積和平方公分

1 拿出卡片看看它的面積有多大？拿出附件P9的透明板看看。

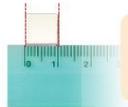


小卡片用18個方格滿，它的面積和18個方格的面積一樣大。

面積的大小就是面積。

2 拿出附件P9的一個方格，量量看看。

1 是什麼圖形？每邊長是幾公分？



是邊長1公分的正方形，面積是1平方公分，平方公分可以用 $\text{cm}^2$ 表示。

2 3個1平方公分是幾平方公分？

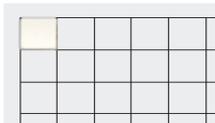


3個1平方公分是3平方公分。

3 說說看看，1中小卡片的的面積是幾平方公分？

40 配合習作第32頁

4 拿出如下圖的附件。說說看看，每個小格的面積都是1平方公分嗎？



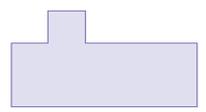
每個小格面積都是1平方公分的透明板，叫作平方公分板。



5 用平方公分板量量看看，下面各圖的面積是幾平方公分？

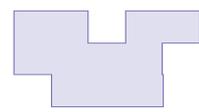
把平方公分板放在圖形上，格線邊對齊。

1



( ) 平方公分

2



( ) 平方公分

#### 練習一下

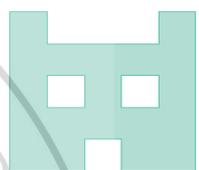
用平方公分板量量看看下面各圖的面積。

①



( )  $\text{cm}^2$

②

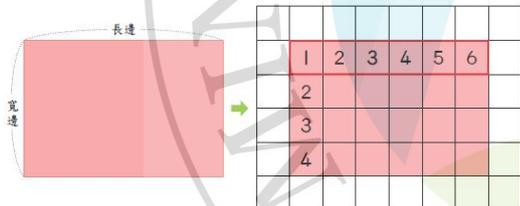


( )  $\text{cm}^2$

教師的建議 本頁活動配合附件P9和平方公分板使用。

配合習作第33頁 41

6 用平方公分板算出長方形的面積。



一排有6個，共有4排，所以……

1 長邊一排有6個方格，表示長邊是( )公分。

2 寬邊有4個方格，表示共有4排，寬邊是( )公分。

3 用平方公分板量長方形，一排有6個方格，共有4排，用算式記作 $6 \times 4 = ( )$ ，表示有( )個1平方公分，面積是( )平方公分。

#### 練習一下

先用平方公分板量量看看，再回答問題：



每邊是( )公分，共有( )個方格，用算式記作( )，面積是( )  $\text{cm}^2$ 。

42 配合習作第33、34頁

教師的建議 長方形和正方形面積公式依據47綱要在四年級才教學，此處僅為前置經驗。

7 下面各圖形都是用1平方公分的正方形圖卡拼成的，數數看看，它們的面積各是幾平方公分？



說說看看，你發現了什麼？

3個圖形的面積都是6平方公分。

3個圖形的形狀不同，但面積都相同。

8 畫出一個和下面圖形狀態不同，但面積相同的長方形，並塗上顏色。



教師的建議 若學生若解題有困難，教師可引導學生先畫出附件P9的12個白色方瓦，拼成長方形後，再塗上顏色。

配合習作第35、36頁 43

### 【三下】第4單元面積

- 教學目標：
  - (1) 能透過覆蓋面的活動，認識面積。
    - (1-1) 透過白色方瓦覆蓋活動，能描述面的大小，認識面積。
    - (2) 能利用平方公分板實測和計算圖形的面積。
      - (2-1) 能認識面積的單位「平方公分」。
      - (2-2) 能使用平方公分板，並以平方公分板為單位點數圖形面積。
      - (2-3) 能透過平方公分板，運用乘法計算圖形的面積。
      - (2-4) 能夠透過圖形拼排活動，了解等積異形的概念。
  - 在【4-1 認識面積和平方公分】課程前，以牛皮圈地故事激發學習動機。
  - 【活動1】拼鋪高手來取代，小節【⑦】和【⑧】等積異形。
  - 將【活動1】拼鋪高手增加拼鋪正方形片的邊長測量與命名則可以成為本小節【①~⑥】之奠基。
  - 課本命題則當作形成性評量。

### 3. 【四下】第6單元周長和面積

#### 6-1 周長公式

1 一條邊長 12 公分的正方形手帕，周長是幾公分？

$12 \times 4 = 48$       正方形的 4 個邊都一樣長。

答：48 公分

正方形周長 = 邊長  $\times$  4

2 籃球場的長 28 公尺、寬 15 公尺，周長是幾公尺？

$28 \times 2 + 15 \times 2 = 56 + 30 = 86$        $(28 + 15) \times 2 = 43 \times 2 = 86$

先算長加寬，再乘以 2。

答：86 公尺

長方形周長 = 長  $\times$  2 + 寬  $\times$  2 = (長 + 寬)  $\times$  2

練習一下

長 140 公分、寬 60 公分的長方形壁畫，周長是幾公分？

#### 6-2 長方形和正方形的面積公式

1 用附件的平方公分板，算出這張卡片的面積是幾平方公分？

$5 \times 3 = 15$

長 1 列有 5 格，寬有 3 列，共有 15 格，是 15 平方公分。

答：15 平方公分

這張卡片的長有幾格？是幾公分？寬有幾格？是幾公分？

長有 5 格，是 5 公分。寬有 3 格，是 3 公分。

說說看，你發現了什麼？

$5 \text{ (cm)} \times 3 \text{ (cm)} = 15 \text{ (cm}^2\text{)}$

長方形面積 = 長  $\times$  寬

2 這張書籤的長是幾公分？寬是幾公分？面積是幾平方公分？

長方形面積 = 長  $\times$  寬

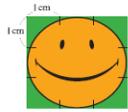
72 配合習作第 54 頁

**給教師的建議** 學習本活動前，教師可先喚起學生的舊經驗，如：「兩旁的長稱為兩長」，「正方形 4 個邊等長」，「長方形對邊等長」等概念。

73 配合習作第 55、56 頁

**給教師的建議** 佈置 長方形面積 = 長  $\times$  寬為一般公式，若學生的算式為  $3 \times 5 = 15$  亦為正確，教師應予接受。

**3** 正方形貼紙的邊長是幾公分？面積是幾平方公分？



和長方形面積想法一樣，  
正方形面積 = 邊長 × 邊長。

$3 \times 3 = 9$

答：3 公分，9 平方公分

**4** 拿出附件中的色紙，估估看，這張色紙的面積大約有多大？說說看，你是怎麼估的？（配合附件 P15）



食指的寬大約是 1 公分，用食指的寬量色紙的邊長，量了 14 次， $14 \times 14 = 196$ ，面積大約是 196 平方公分。

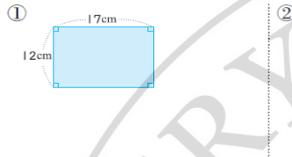
量量看，你估對了嗎？

**練習一下**

(1) 圈圈看：

長 10 公分、寬 6 公分的長方形面積是  
(  $32\text{cm}$  ,  $32\text{cm}^2$  ,  $60\text{cm}$  ,  $60\text{cm}^2$  )

(2) 算算看，下面圖形的面積各是多少？



74 配合習作第 55、56 頁

**6-3 周長和面積的關係**

**1** 下面圖形中，哪個面積比較大？



$8 \times 2 = 16$



$4 \times 4 = 16$

答：一樣大

算算看，這兩個圖形的周長一樣長嗎？

**2** 算出下面圖形的周長和面積，並完成表格。

圖形				
長 (cm)	7			
寬 (cm)	1			
周長 (cm)	$(7+1) \times 2 = 16$			
面積 (cm <sup>2</sup> )	$7 \times 1 = 7$			

說說看，你發現了什麼？

給老師的建議 本活動教學目標是讓學生知道面積一樣大時，周長不一定一樣長；周長一樣長時，面積不一定一樣大，且周長相同的四邊形中，越接近正方形的圖形，面積會越大。

配合習作第 57 頁 75

**6-3 周長和面積的關係**

**1** 下面圖形中，哪個面積比較大？



$8 \times 2 = 16$



$4 \times 4 = 16$

答：一樣大

算算看，這兩個圖形的周長一樣長嗎？

**2** 算出下面圖形的周長和面積，並完成表格。

圖形				
長 (cm)	7			
寬 (cm)	1			
周長 (cm)	$(7+1) \times 2 = 16$			
面積 (cm <sup>2</sup> )	$7 \times 1 = 7$			

說說看，你發現了什麼？

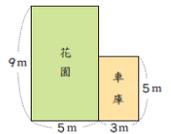
給老師的建議 本活動教學目標是讓學生知道面積一樣大時，周長不一定一樣長；周長一樣長時，面積不一定一樣大，且周長相同的四邊形中，越接近正方形的圖形，面積會越大。

配合習作第 57 頁 75

**6-5 複合圖形的面積**

**1** 右圖花園和車庫的面積各是幾平方公尺？合起來是幾平方公尺？

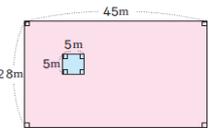
$9 \times 5 = 45$  ← 花園的面積  
 $5 \times 3 = 15$  ← 車庫的面積  
 $45 + 15 = 60$



答：花園面積 45 平方公尺，車庫面積 15 平方公尺；合起來是 60 平方公尺

**2** 陳伯伯在長方形土地上建了一個正方形水池，如右圖，剩下的土地種玫瑰，種玫瑰的土地面積是幾平方公尺？

$45 \times 28 = 1260$  ← 長方形土地的面積  
 $5 \times 5 = 25$  ← 正方形水池的面積  
 $1260 - 25 = 1235$

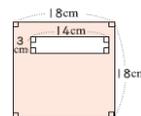


先算出全部土地的面積，再扣掉正方形水池的面積。

答：1235 平方公尺

**練習一下**

算算看，下圖塗色部分的面積是幾平方公分？

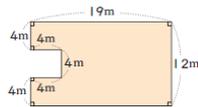


給老師的建議 本活動教學目標是讓學生知道面積一樣大時，周長不一定一樣長；周長一樣長時，面積不一定一樣大，且周長相同的四邊形中，越接近正方形的圖形，面積會越大。

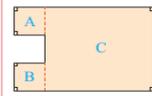
配合習作第 57 頁 75

78 配合習作第 59 頁

- 3 右圖中，旺來養雞場的面積是幾平方公尺？



阿旺的解法：



$$4 \times 4 = 16 \leftarrow \text{正方形 A 的面積}$$

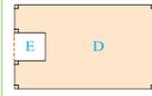
$$4 \times 4 = 16 \leftarrow \text{正方形 B 的面積}$$

$$(19 - 4) \times 12 = 180 \leftarrow \text{長方形 C 的面積}$$

$$16 + 16 + 180 = 212$$

把圖形切成 2 個正方形和 1 個長方形。

阿來的解法：



$$19 \times 12 = 228 \leftarrow \text{長方形 D 的面積}$$

$$4 \times 4 = 16 \leftarrow \text{正方形 E 的面積}$$

$$228 - 16 = 212$$

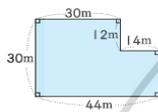
補成 1 個長方形，再扣掉增補的正方形。

答：212 平方公尺

還有其他算法嗎？

練習一下

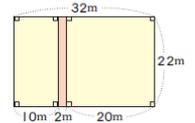
算算看，下圖的面積是幾平方公尺？



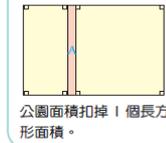
給教師的建議 在本活動後，讓學生回桌轉元典的問題並解題。

配合習作第 60 頁 79

- 4 長方形公園裡有一條寬 2 公尺的健康步道，健康步道以外的公園面積是幾平方公尺？



奇奇的解法：



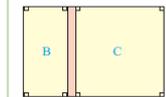
$$32 \times 22 = 704 \leftarrow \text{公園面積}$$

$$22 \times 2 = 44 \leftarrow \text{長方形 A 的面積}$$

$$704 - 44 = 660$$

公園面積扣掉 1 個長方形面積。

妙妙的解法：



$$22 \times 10 = 220 \leftarrow \text{長方形 B 的面積}$$

$$22 \times 20 = 440 \leftarrow \text{長方形 C 的面積}$$

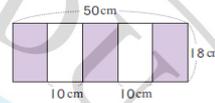
$$220 + 440 = 660$$

分別算出健康步道以外的 2 個長方形面積。

答：660 平方公尺

練習一下

算算看，下圖塗色部分的面積是幾平方公分？



80 配合習作第 60 頁

【四下】第 6 單元周長和面積

➤ 教學目標：

- (1) 能理解正方形和長方形周長的公式。
  - (1-1) 能用正方形周長的公式=邊長 X 4，算出正方形的周長。
  - (1-2) 能用長方形周長的公式=(長+寬)X 2，算出長方形的周長。
- (2) 認識平方公分。
  - (2-1) 以 1 平方公分為單位，進行面積的估測和實測。
- (3) 能理解正方形和長方形面積的公式。
  - (3-1) 能用長方形面積的公式=長 X 寬，算出長方形的面積。
  - (3-2) 能用正方形面積的公式=邊長 X 邊長，算出正方形的面積。
- (4) 應用長方形或正方形面積公式，解決生活中長方形或正方形的面積問題。
  - (4-1) 應用長方形面積公式，解決生活中長方形的面積問題。
  - (4-2) 應用正方形面積公式，解決生活中正方形的面積問題。
  - (4-3) 應用長方形或正方形面積公式，解決生活中複合圖形的面積問題。

➤ 在【6-1 周長公式】和【6-2 長方形和正方形面積公式】課程前，以牛皮圈地故事激發學習動機，並以【活動 1】拼鋪高手進行奠基。

➤ 在【6-3 周長與面積的關係】中，以【活動 1】拼鋪高手來取代本小節【①】等面積不等周長。

- 以【延伸活動】佔地圍王來取代本小節【②】等周長不等面積。
- 【延伸活動】佔地圍王可以為【②】等周長不等面積，進行延伸學習，進而發現周長相等時圍出圖形越接近正方形其面積越大。
- 【活動 2】周長密碼可以為【①】等面積不等周長，進行延伸學習，進而發現面積相等時圍出圖形越接近正方形其周長越短。
- 【活動 1】拼鋪高手以及【活動 2】周長密碼是【6-4 複合圖形的面積】的奠基，此 2 個活動所繪製出來的圖形，進行延伸學習，找出複合圖形的面積與周長的策略。
- 課本命題則當作形成性評量。



(二) 學習記錄單修改

1. 【活動1】拼鋪高手之學習記錄單(加上畫出所拼出圖形)，或使用原來的記錄單，再加一張方格紙，讓學畫下所拼出的圖形。

投出的數字是( )			畫出所排圖形並在圖形上寫出序號和周長 投出的數字是( )，所以圖形的面積都是( )																
序號	面積	周長																	
1																			
2																			
3																			
4																			
5																			
6																			
7																			
8																			
9																			
10																			
11																			
12																			
13																			
14																			
15																			
16																			
17																			
18																			
19																			
20																			

2. 【延伸活動】佔地圍王之學習記錄單(加上畫出所拼出圖形)，或使用原來的記錄單，再加一張方格紙，讓學畫下所圍出的圖形。

投出的數字和是( )			畫出所排圖形並在圖形上寫出序號和面積 投出的數字和是( )，所以圖形的周長都是( )																	
序號	面積	周長																		
1																				
2																				
3																				
4																				
5																				
6																				
7																				
8																				
9																				
10																				
11																				
12																				
13																				
14																				
15																				
16																				
17																				
18																				
19																				
20																				
21																				



# 比面積還是比周長素養奠基包評量

指導教授：林原宏

設計者：黃秀玉

學習活動中	學生學習檢核表	教師觀察檢核表
	學習檢核表雙向細目表	
學習活動後	比面積還是比周長課後學習單	



「比面積還是比周長」學生學習檢核表 姓名：\_\_\_\_\_

【引起動機】牛皮圈地傳說

檢核項目	自評	他評 評量者：_____
1-1 能專心聆聽故事	<input type="checkbox"/> 完全達到 <input type="checkbox"/> 部分達到 <input type="checkbox"/> 尚未達到	<input type="checkbox"/> 完全達到 <input type="checkbox"/> 部分達到 <input type="checkbox"/> 尚未達到
1-2 能有初步的想法 (同繩長圍地，所圍地面積是否均會相同)	<input type="checkbox"/> 完全達到 <input type="checkbox"/> 部分達到 <input type="checkbox"/> 尚未達到	<input type="checkbox"/> 完全達到 <input type="checkbox"/> 部分達到 <input type="checkbox"/> 尚未達到

【活動一】拼鋪高手

2-1 能拼出圖形	<input type="checkbox"/> 完全達到 <input type="checkbox"/> 部分達到 <input type="checkbox"/> 尚未達到	<input type="checkbox"/> 完全達到 <input type="checkbox"/> 部分達到 <input type="checkbox"/> 尚未達到
2-2 能正確記錄圖形的周長和面積	<input type="checkbox"/> 完全達到 <input type="checkbox"/> 部分達到 <input type="checkbox"/> 尚未達到	<input type="checkbox"/> 完全達到 <input type="checkbox"/> 部分達到 <input type="checkbox"/> 尚未達到
2-3 能舉例說明相同面積，可以有不同的形狀	<input type="checkbox"/> 完全達到 <input type="checkbox"/> 部分達到 <input type="checkbox"/> 尚未達到	<input type="checkbox"/> 完全達到 <input type="checkbox"/> 部分達到 <input type="checkbox"/> 尚未達到
2-3 能舉例說明相同面積，可以有不同的周長	<input type="checkbox"/> 完全達到 <input type="checkbox"/> 部分達到 <input type="checkbox"/> 尚未達到	<input type="checkbox"/> 完全達到 <input type="checkbox"/> 部分達到 <input type="checkbox"/> 尚未達到

【活動二】周長密碼

3-1 能積極參與討論找出最佳圖形	<input type="checkbox"/> 完全達到 <input type="checkbox"/> 部分達到 <input type="checkbox"/> 尚未達到	<input type="checkbox"/> 完全達到 <input type="checkbox"/> 部分達到 <input type="checkbox"/> 尚未達到
3-2 能說出相同面積，圖形形狀和周長的關係	<input type="checkbox"/> 完全達到 <input type="checkbox"/> 部分達到 <input type="checkbox"/> 尚未達到	<input type="checkbox"/> 完全達到 <input type="checkbox"/> 部分達到 <input type="checkbox"/> 尚未達到
3-3 能以邊邊相鄰的數量多或是少，來說明等面積圖形的周長變化	<input type="checkbox"/> 完全達到 <input type="checkbox"/> 部分達到 <input type="checkbox"/> 尚未達到	<input type="checkbox"/> 完全達到 <input type="checkbox"/> 部分達到 <input type="checkbox"/> 尚未達到

# 「比面積還是比周長」教師觀察檢核表

## 【引起動機】牛皮圈地傳說

檢核項目	學童達成率
1-1 學童能專心聆聽故事	<input type="checkbox"/> 0%-25% <input type="checkbox"/> 26%-50% <input type="checkbox"/> 51%-75% <input type="checkbox"/> 76%-100%
1-2 學童能對同繩長圍地，所圍地面積是否均會相同表示看法	<input type="checkbox"/> 0%-25% <input type="checkbox"/> 26%-50% <input type="checkbox"/> 51%-75% <input type="checkbox"/> 76%-100%
<b>【活動一】拼鋪高手</b>	
2-1 學童能拼出等面積形狀不同之圖形	<input type="checkbox"/> 0%-25% <input type="checkbox"/> 26%-50% <input type="checkbox"/> 51%-75% <input type="checkbox"/> 76%-100%
2-2 學童能正確記錄圖形的周長和面積	<input type="checkbox"/> 0%-25% <input type="checkbox"/> 26%-50% <input type="checkbox"/> 51%-75% <input type="checkbox"/> 76%-100%
2-3 學童能說明相同面積，形狀不一定相同	<input type="checkbox"/> 0%-25% <input type="checkbox"/> 26%-50% <input type="checkbox"/> 51%-75% <input type="checkbox"/> 76%-100%
2-3 學童能說明相同面積，周長不一定相同	<input type="checkbox"/> 0%-25% <input type="checkbox"/> 26%-50% <input type="checkbox"/> 51%-75% <input type="checkbox"/> 76%-100%
<b>【活動二】周長密碼</b>	
3-1 學童能積極參與討論找出最佳圖形	<input type="checkbox"/> 0%-25% <input type="checkbox"/> 26%-50% <input type="checkbox"/> 51%-75% <input type="checkbox"/> 76%-100%
3-2 學童能說出相同面積，圖形形狀和周長的關係(聚集在一起，周長較短；拉長，周長較短)	<input type="checkbox"/> 0%-25% <input type="checkbox"/> 26%-50% <input type="checkbox"/> 51%-75% <input type="checkbox"/> 76%-100%
3-3 學童能用邊邊相鄰的數量多寡，來說明未合世周長最長或最短之圖形	<input type="checkbox"/> 0%-25% <input type="checkbox"/> 26%-50% <input type="checkbox"/> 51%-75% <input type="checkbox"/> 76%-100%

## 「比面積還是比周長」活動目標與領綱及二十一世紀公民技能

活動名稱	【引起動機】 牛皮圈地傳說	【活動一】 拼鋪高手	【活動二】 周長密碼	【延伸活動】 佔地圍王	【課後活動】 我是小老師
活動目標 學習目標 (領綱學習重點)	1. 引發學習動機 2. 學生的先備知識，面積和周長的初步認識	1. 穩固「周長」與「面積」概念 2. 發現等積異形 3. 等面積不一定等周長	覺察等面積，圖形的形狀與周長之關係	覺察等周長，圖形的形狀與面積之關係	能夠將今天所學進行歸納及反思(嘗試將今天所學，教會一位未曾學習過此課程的朋友)
學習目標 (二十一世紀公民技能)	【批判性思考】 察覺矛盾	【系統性思維】 找元素、找關係並歸納、建系統(未達到)	【系統性思維】 找元素、找關係並歸納、建系統(未達到) 【批判性思考】 察覺矛盾、說理反駁、判斷有效性	【系統性思維】 找元素、找關係並歸納、建系統(未達到)	
<p>【研究與探究】：提想法、做試驗、下結論</p> <p>【自主堅持】：自主導向、自動自發、堅持不懈</p> <p>【反思】：事件描述、詮釋了解、批判評鑑</p>					

## 「比面積還是比周長」活動評量與二十一世紀公民技能之示例

活動名稱	二十一世紀公民技能	模組活動中的評量
【活動一】 拼鋪高手	系統性思維	<p>拼排圖形(正方形片拼鋪圖形)→記錄圖形、面積和周長</p> <p>【找元素】由紀錄中覺察面積、周長和圖形。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>師：從你們的剛才的遊戲經驗及記錄，有發現什麼特別的地方？小組討論看看。</li> </ul> <p>【找關係並歸納】找出並歸納面積、周長和圖形間的關係。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>生：擲到的骰子數愈多，可以排的圖形愈多。</li> <li>生：我們骰出的數字是 6，面積全部都是 6，可是我們周長有很多都是一樣的，可是有少數的都不一樣的。</li> <li>師：同樣的正方形片，比如說我抽到 5 或抽到 6，那我可以排出的圖形形狀只有一種嗎？</li> </ul>

			<p>生：有很多種。</p> <p>【建系統】將三個元素的關係結構組織起來，形成面積、形狀和周長關係之系統。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● 師：請分享一下獲勝的秘訣。</li> <li>● 生：當你跟人家排一模一樣的時候，你可以把一個方塊轉換成別的地方。</li> <li>● 生：面積一樣的圖形，我們可以找到不一樣的形狀。</li> <li>● 生：面積一樣的圖形，我們找到很多不一樣的周長。</li> </ul>
【活動二】 周長密碼	系統性思維	找元素 找關係並歸納 建系統(未達到)	<p>拼排出等面積周長最長或最短的圖形(正方形片拼鋪圖形) →記錄圖形、面積和周長</p> <p>【找元素】由操作中覺察周長和圖形。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● 老師請學生小組合作拼出圖形後，透過小組討論找出最佳圖形(等面積情境下，周長最長或最短的圖形)，並紀錄圖形的形狀、面積和周長。</li> </ul> <p>【找關係並歸納】找出並歸納周長和圖形的關係。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● 師：為什麼這樣子他的周長會最長，有沒有什麼想法？</li> <li>● 生：凸出來的比較長，算得比較比較多。</li> <li>● 師：比排在一起多 3 個嗎？</li> <li>● 生：本來沒有一個周長，拿掉，這邊就變成 1 個周長，所以是多 2 個。</li> <li>● 師：如果邊邊相鄰的數量比較少(多)，那他的周長會怎麼樣？為什麼？誰可以說說看。</li> <li>● 生：那個邊邊相鄰的數量比較多，因為他是一個一個黏在一起，然後中間那些都是不會算到，然後它的數量就會比較少。</li> <li>● 生：如果是比較少的話，他是會有很多間隔出來的，所以他算就會算比較多。</li> </ul>
		提想法 做試驗 下結論	<p>【提想法】提出同面積的圖形，要怎麼排可以排出周長最長或短的圖形。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● 師：你要想想看，要怎麼會最長哦，有沒有什麼想法？為什麼這樣子他的周長會最長，想想看。</li> <li>● 生：排出圖形凹凹凸凸，周長會比較長。</li> <li>● 生：排出圖形長長的，周長會比較長。</li> <li>● 師：想想看要怎麼排周長會最短。</li> <li>● 生：正方形片集中在一起的圖形，周長會比較短。</li> </ul> <p>【做試驗】以「周長密碼」活動進行相關試驗。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● 學生依想法進行操作及比較。</li> </ul> <p>【下結論】根據試驗的結果，確認想法。</p>

			<ul style="list-style-type: none"> <li>● 生：如果你是比較長的話，你就把全部的拼成一條直線。然後，如果是比短的話，你就把他全部集中在一個方塊裡面。</li> <li>● 師：如果邊邊相鄰的數量比較少(多)，那他的周長會怎麼樣？為什麼？誰可以說說看。</li> <li>● 生：那個邊邊相鄰的數量比較多，因為他是一個一個黏在一起，然後中間那些都是不會算到，然後它的數量就會比較少。</li> <li>● 生：如果是比較少的話，他是會有很多間隔出來的，所以他算就會算比較多。</li> </ul>
	批判性思考	察覺矛盾 說理反駁 判斷有效性	學生拼鋪等面積其周長最長圖形，並進行檢核。 【察覺矛盾】檢核時學生發現多排了一片正方形片，有學生說拿掉一片正方形片周長會少 3 段，而有學生說周長是少 2 段，不同想法產生矛盾。 <ul style="list-style-type: none"> <li>● 師：比排在一起多 3 段嗎？多 3 段嗎？</li> </ul> 【說理反駁】學生覺察拿掉一片正方形片 <ul style="list-style-type: none"> <li>● 生：本來沒有一個周長，拿掉，這邊就變成 1 段周長，所以是多 2 段。</li> </ul>  【判斷有效性】判斷出每拿掉一片，周長長度會少 2 段。
【延伸活動】 佔地圍王	系統性思維	找元素 找關係並歸納 建系統(未達到)	圍圖形(扣條圍圖形)→記錄圖形、面積和周長 【找元素】由紀錄中覺察面積、周長和圖形。 【找關係並歸納】找出並歸納面積、周長和圖形間的關係。將三個元素的關係結構組織起來，形成面積、形狀和周長關係之系統。
【引起動機】 牛皮圈地傳說 【延伸活動】 佔地圍王	批判性思考	察覺矛盾 說理反駁 判斷有效性	牛皮圈地傳說→同一條繩子來圍一塊地，不管怎樣圍，所圍出來的地都會一樣大嗎？→圍圖形(扣條圍圖形)→記錄圖形、面積和周長 【察覺矛盾】有學生說因為是同一條繩子，所以不管怎樣圍，所圍出來的地會是一樣大；有學生說圍的形狀不同，所以大小也不同。不同想法產生矛盾。 【說理反駁】學生透過「佔地圍王」活動，發現用一樣長的扣條，所圍出的面積並不相同。 【判斷有效性】判斷出同一條繩子因圍的形狀不同，所以

			大小也可能不同，圍成細長形面積會比較小，長和寬越接近面積會越大。
【課後活動】 我是小老師	反思	事件描述 詮釋了解 批判評鑑	【事件描述】學生反思自己的學習歷程。 【詮釋了解】反思所學之概念，並以適當的方式進行詮釋。 【批判評鑑】已面臨的情境進行批判，尋找更適合的方式進行說明。
【引起動機】 牛皮圈地傳說	研究與探究	提想法 做試驗 下結論	【提想法】同一條繩子，所以不管怎樣圍，所圍出來的地會是一樣大。有圍的形狀不同，所以大小也不同。 【做試驗】以「佔地圍王」活動進行相關試驗。 【下結論】根據試驗的結果，確認或修正想法。
【活動一】 拼鋪高手			
【活動二】 周長密碼	自主堅持	自主導向 自動自發 堅持不懈	【自主導向】學生在活動中，主動且投入。 【自動自發】自主造例，並主動提出想法與作法。 【堅持不懈】遇到困難時，會嘗試以舊經驗來解決問題。
【延伸活動】 佔地圍王			
【課後活動】 我是小老師	反思	事件描述 詮釋了解 批判評鑑	【事件描述】學生可以說出自己的操作歷程。 【詮釋了解】裡面的邊長本來不用算，拿掉後就要算。 【批判評鑑】學生可以說出特別的地方，看得懂他在比什麼嗎？怎樣排周長會最長？為什麼這樣排周長會最長？

## 雙向細目表

評量 子概念或技能		奠基或現實情境的形成性評量	數學情境的形成性評量
		面積和周長的點數或計算	三(1)
畫出指定面積之長方形或正方形			二(1)
面積、	等積異形	三(2)	三(1)、(2)

形狀與周長之關係	等面積不等周長		二(1)
	等面積，形狀與周長之關係	三(1)、(2)、五(1)、(2) 和 四(1)、(2)、(3)、(4)	
	等周長，形狀與面積之關係	三(2)	



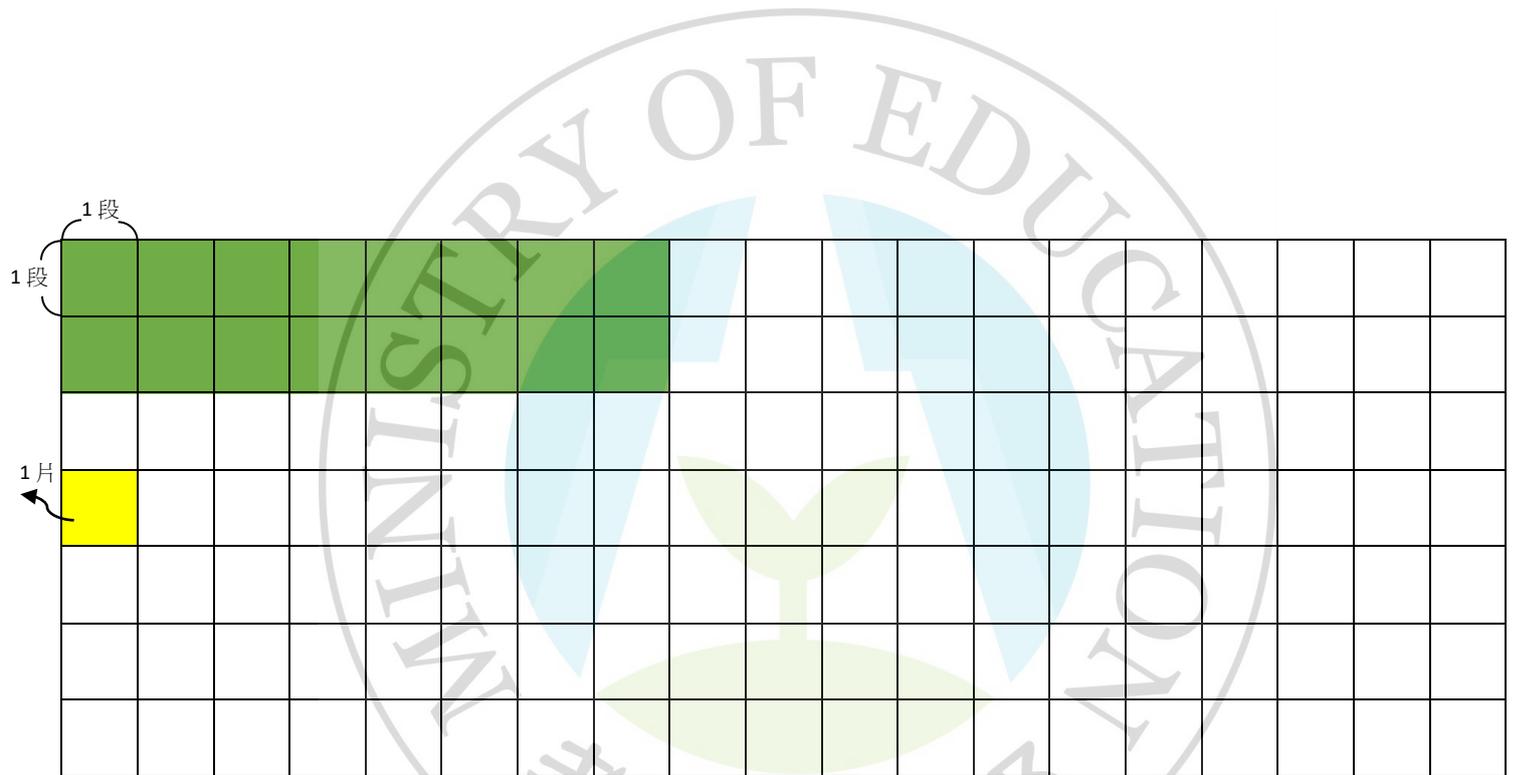
# 比面積還是比周長課後學習單

姓名：\_\_\_\_\_

一. 下面是一張綠色的長方形色紙。

(1) 請問這張色紙的面積是幾片？請寫出你作法。

(2) 請問這張色紙的周長是幾段？請寫出你作法。

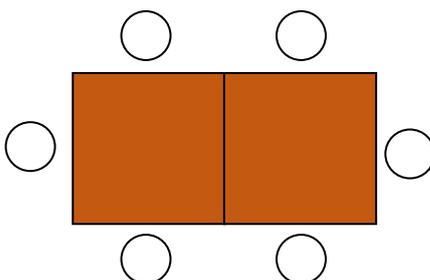
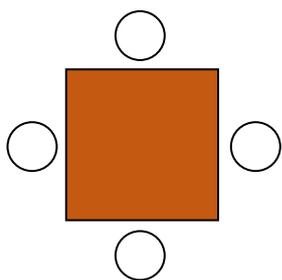


二. 做做看。

(1) 請在上面的方格中，畫出 1 個和上圖綠色色紙「面積相同，而周長不同」的正方形或長方形。

(2) 你畫的圖形，它的周長和面積各是多少？請寫出你作法。

三. 小玉 爸爸的公司，要舉辦中秋節聚餐，想要租用正方形桌子，每張正方形桌子的每一邊只可以坐 1 人，所租用的桌子要併成長方形或正方形，如下圖。

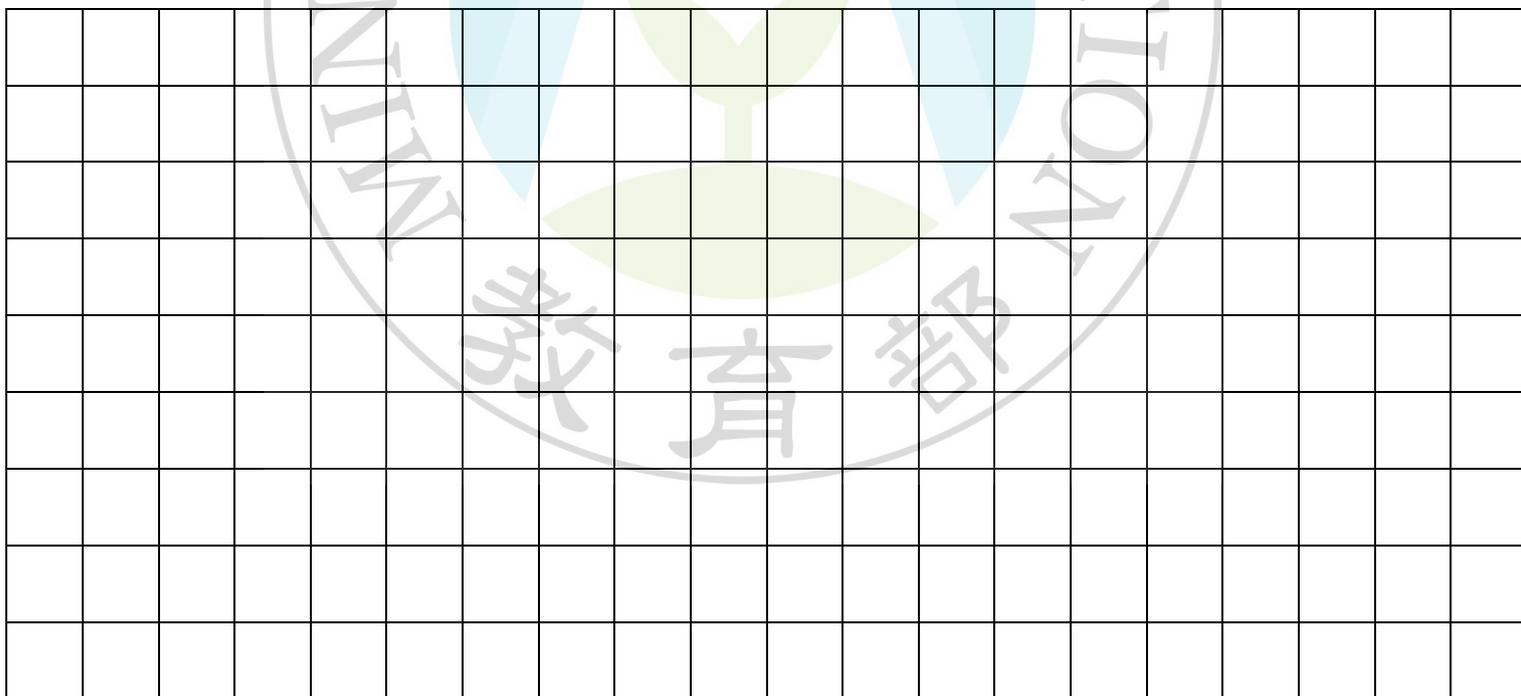


每一邊恰可以坐 1  
人，1 張桌子坐 4 人

2 張桌子可以坐 6 人

(1) 請問如果租用 4 張桌子，座位都坐滿，可以坐幾個人？請寫出你的想法或作法。

(2) 有 36 人要參加這一次的活動，座位都坐滿，請畫出桌子的排法？畫出越多種越好。



(3) 小玉 說：「租 9 張桌子，就可以座 36 人。」請問 小玉 的說法正確嗎？請說明你的理由。

四. 想在學校圖書館，用 16 片邊長 30 公分的正方形地墊，拼出「正方形或長方形」。

(1) 請列出可能拼法的長邊和短邊分別是多少片？列出越多種不同形狀越好。

(2) 請問哪一種拼法，拼出的周界最大？請說明你的理由。

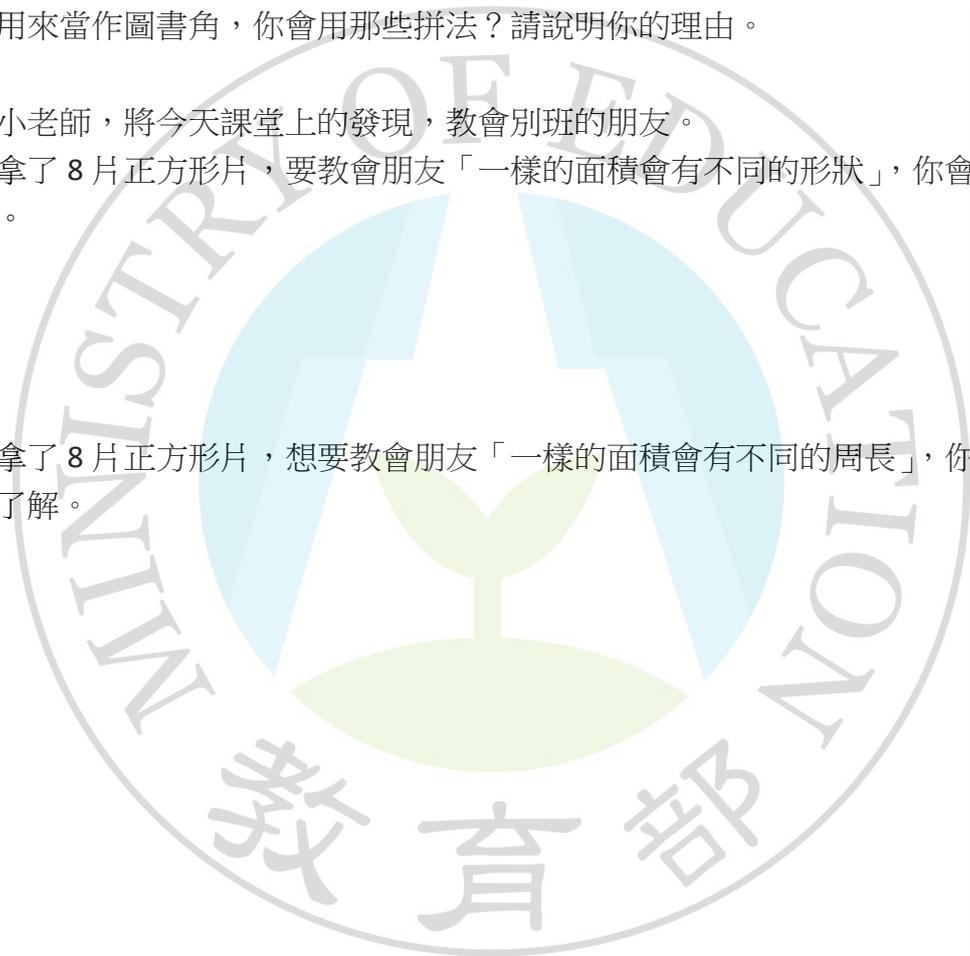
(3) 請問哪一種拼法，拼出的周界最小？請說明你的理由。

(4) 如果要用來當作圖書角，你會用那些拼法？請說明你的理由。

五. 你要當一位小老師，將今天課堂上的發現，教會別班的朋友。

(1) 如果你拿了 8 片正方形片，要教會朋友「一樣的面積會有不同的形狀」，你會怎麼做？確認朋友了解。

(2) 如果你拿了 8 片正方形片，想要教會朋友「一樣的面積會有不同的周長」，你會怎麼做呢？確認朋友了解。



比面積還是比周長課後學習單雙向細目表

二十一世紀公民技能		題號												
		1(1)	1(2)	2(1)	2(2)	3(1)	3(2)	3(3)	4(1)	4(2)	4(3)	4(4)	5(1)	5(2)
系統性思維	找元素	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓			
	找關係並歸納					✓	✓		✓	✓	✓			
	建系統						✓		✓	✓	✓			
研究與探究	提想法							✓						
	做試驗							✓						
	下結論							✓						
批判性思考	察覺矛盾							✓				✓		
	說理反駁							✓				✓		
	判斷有效性							✓				✓		
創造力	流暢性													
	變通性													
	獨特性													
反思	事件描述												✓	✓
	詮釋了解												✓	✓
	批判評鑑												✓	✓
自主堅持	自主導向													
	自動自發													
	堅持不懈													

## 「比面積還是比周長」影片逐字稿

編號	時間	發言者	內容
1	[00:00:31.33]	老師	好，那我們今天老師先講一個牛皮圈地畫地的故事。
2	[00:00:36.23]	旁白	傳說從前荷蘭人來到台灣以後。
3	[00:00:39.63]	老師	荷蘭人就跟我們台灣的人說，我想要跟你換一塊地，跟牛皮一樣大的地，那個牛皮是4平方公尺，大概地上4塊地磚這麼大，用很多金銀財寶跟你換這麼大塊的地，如果是你會。
4	[00:00:56.25]	小朋友	會。
5	[00:00:56.45]	老師	會。他就說好，結果那個荷蘭人他就說，我把那個牛皮剪開，剪成一條很長很長的細線，3000公尺的細線，然後他說用那條細線來圍地，那個台灣人答應他的就後悔啦。然後老師問你，如果老師這邊有一條繩子，我想要用這條繩子來圍一塊地，你覺得不管老師怎樣圍，所圍出來的地都會一樣大嗎？覺得會一樣大的舉手。好，為什麼你覺得會一樣大？
6	[00:01:28.87]	小朋友	因為他們的那些線都一樣長。
7	[00:01:32.88]	老師	覺得不一樣的舉手。
8	[00:01:34.28]	小朋友	因為形狀不同，所以大小也不同。
9	[00:01:42.96]	老師	好，那我們等一下來上課，然後我們來操作，看看呢圍出來的地會不會一樣大。那如果圍成這樣，要有一個邊重疊，這樣就可以，那這裡有沒有一個邊重疊？
10	[00:01:58.09]	小朋友	沒有。
11	[00:01:58.49]	老師	沒有，這種可不可以？
12	[00:01:59.95]	小朋友	不行。
13	[00:02:00.51]	老師	不行，那如果這種呢？中間有一個洞洞的可不可以？
14	[00:02:04.30]	小朋友	不行。
15	[00:02:04.44]	老師	不行。這個跟這個，你覺得一樣的舉手。來，為什麼你覺得一樣，誰可以告訴我。
16	[00:02:11.63]	小朋友	因為他只是轉一邊而已。
17	[00:02:15.91]	老師	所以呢，不管他轉，用翻的，都算同樣一種圖形，就不算得分好不好。
18	[00:02:28.36]	老師	那我們現在等一下玩遊戲，老師講一下遊戲規則，第一個動作是做什么？擲骰子。擲骰子就是丟點數對不對，那假裝老師丟的點數是3，那3代表拿拿3個出來拚，最少一個邊重疊，然後呢可以繞一圈，起點跟終點連接在一起的，這樣懂嗎？好，這樣子我已經得1分，因為我拼出3塊的圖形。周長，來，誰可以出來數給大家看。
19	[00:03:05.30]	小朋友	1段、2段、3段、4段。
20	[00:03:08.44]	老師	跟他一起數。
21	[00:03:09.10]	小朋友	5段、6段、7段、8段。
22	[00:03:12.35]	老師	好，很棒。周長剛剛數8段，那面積呢？
23	[00:03:16.31]	小朋友	1、2、3。
24	[00:03:18.34]	老師	3？
25	[00:03:19.64]	小朋友	片。

- 26 [00:03:20.95] 老師 數完把他記錄在，他數對了就再得一個代幣，然後記錄在紀錄單上面，紀錄單拿給第2位小朋，下一位小朋一直玩。第2個小朋如果他排這樣，可不可以？
- 27 [00:03:36.42] 小朋友 可以。
- 28 [00:03:37.62] 老師 真的嗎？
- 29 [00:03:38.49] 小朋友 真的。
- 30 [00:03:39.57] 老師 我們有沒有跟他一樣？
- 31 [00:03:40.81] 小朋友 有。
- 32 [00:03:41.75] 老師 這樣可不可以？
- 33 [00:03:42.75] 小朋友 可以。
- 34 [00:03:43.89] 老師 不行，因為已經排過了，我只是把他轉過來，這樣就不算得分，知道嗎？那第2個小朋排這樣可不可以？
- 35 [00:03:53.19] 小朋友 可以。
- 36 [00:03:54.29] 老師 可以，他先得1分，好，如果大家都想不到，大家都P老師SS，就換第2回，再丟骰子換另外一個數字，如果一樣丟到3，可不可以再玩3？不行，要換另外一個數字，這樣可以嗎？現在請小朋開始玩遊戲。4，所以拿幾片？
- 37 [00:04:20.51] 小朋友 4片。
- 38 [00:04:21.45] 老師 很棒哦。
- 39 [00:04:22.35] 小朋友 這樣就第2回了。
- 40 [00:04:23.88] 小朋友 7、8、9、10、11。
- 41 [00:04:28.12] 老師 8，周長8段。
- 42 [00:04:35.11] 小朋友 動腦想一下。
- 43 [00:04:47.65] 老師 好，來，我們來看哦，老師問一下，周長跟面積指的是什麼？誰可以比給大家看？
- 44 [00:04:56.71] 小朋友 他的面積指的是這一整塊。
- 45 [00:04:59.08] 老師 這一整塊的裡面這個。周長呢？
- 46 [00:05:02.58] 小朋友 就從這邊1，然後到這邊是2，然後再從第3格開始算是3，繞一圈。
- 47 [00:05:09.19] 老師 繞一圈對不對？
- 48 [00:05:12.05] 小朋友 對。
- 49 [00:05:12.27] 老師 好，繞一圈叫周長。剛剛你們有記錄有玩遊戲，你有發現什麼特別的地方？小組討論看看。
- 50 [00:05:31.67] 小朋友 數字是6，面積都是6，可是周長有的會是一樣。
- 51 [00:05:45.30] 老師 好，來，討論時間到。
- 52 [00:05:47.05] 小朋友 擲到的骰子數愈多，可以排的圖形愈多。
- 53 [00:05:54.57] 小朋友 我們骰出的數字是6，面積全部都是6，可是我們周長有很多都是一樣的，可是有少數的都是不一樣的。
- 54 [00:06:04.81] 老師 那老師請問一下，同樣的正方形片，比如說我抽到5或抽到6，那我可以排出的圖形形狀只有一種嗎？有很多種，好，那我們來想想看，剛剛怎麼獲勝？有沒有人要分享一下他獲勝的秘訣。
- 55 [00:06:21.75] 小朋友 當你跟人家排一模一樣的時候，你可以把一個方塊轉換成別的地方。

- 56 [00:06:32.73] 老師 哦，拿其中的一個方塊換到別的地方，就可以找出另外一個圖了，對不對？
- 57 [00:06:37.54] 小朋友 對。
- 58 [00:06:38.28] 老師 那我們來看哦，我們剛剛丟的骰子數，比如說我丟到5，那個5代表什麼？
- 59 [00:06:44.67] 小朋友 要放5個方塊。
- 60 [00:06:45.68] 老師 要放5個方塊，很棒。那5個方塊代表是圖形的什麼？
- 61 [00:06:51.24] 小朋友 是圖形的面積。
- 62 [00:06:52.79] 老師 好，所以我們骰到的點數就是圖形的面積，那請問一下，我用同樣點數出來排，所以他的面積是怎麼樣？
- 63 [00:07:01.88] 小朋友 一樣。
- 64 [00:07:02.42] 老師 他們的面積怎麼樣？
- 65 [00:07:03.91] 小朋友 都一樣。
- 66 [00:07:04.54] 老師 很棒，面積一樣的圖形，我們可以找到不一樣的形狀，那剛也有小朋說，面積一樣的圖形，我們找到很多不一樣的周長。
- 67 [00:07:19.64] 老師 好，那我們第2個遊戲，老師要講規則。等一下抽籤，那老師的籤有2種，一種是比什麼，比周長比較長或者比周長比較短。另外一個是數字籤，你要抽你要拿幾片正方形片來排圖形。好，過來，小組要討論，這次是每一組這樣子比賽，討論呢看怎樣，我可以排出最佳圖形。比如說我說13要比長，怎樣排出用13個正方形片，然後他周長最長的圖形。好，那怎麼記錄呢？剛剛老師說是13跟比長對不對？排出來的圖形會不會把它畫上去？這邊要寫面積是幾片，周長是幾段。那老師要找小朋先來抽籤，你們才可以比對不對？好，比長。10，所以要拿幾個正方形片？10個，然後比長。預備開始。然後排排看怎樣是周長最長。你要想想看，要怎麼會最長哦，有沒有什麼想法？為什麼這樣子他的周長會最長，想想看。
- 68 [00:08:43.73] 小朋友 凸出來的比較長，算得比較比較多。
- 69 [00:08:51.13] 老師 比排在一起多3個嗎？
- 70 [00:08:53.38] 小朋友 對，如果凸出來比，是平還多3個周長。
- 71 [00:09:00.01] 老師 請你再確認一下，到底多了幾段周長呢。
- 72 [00:09:09.77] 老師 好，現在請每一組的3號小朋，來把2號記錄的圖排在前面，然後寫出面積跟周長，排好就下去囉，排好，寫完就下去了。
- 73 [00:09:37.36] 老師 那我們來看一下喔，面積是10片，大家都一樣，因為我們剛抽出來是10，要用10片來排。然後周長有30的，有23的，有22的。那我們...等一下請30的數給我們看，他們周長怎麼數，數出來30好不好？
- 74 [00:10:00.00] 小朋友 2、4、6、8、10、12、14、16、18、20、22、24...
- 75 [00:10:07.11] 小朋友 23、24。
- 76 [00:10:08.11] 老師 看得懂他在比什麼嗎？
- 77 [00:10:09.93] 小朋友 上下兩邊一起數，然最後就再左右旁邊兩個。

- 78 [00:10:16.47] 老師 所以你們確認他這個是多少？
- 79 [00:10:19.38] 小朋友 24。
- 80 [00:10:20.20] 老師 24段。我們少檢查到什麼？
- 81 [00:10:24.29] 小朋友 面積。
- 82 [00:10:24.83] 老師 面積，我們是抽10對不對？10片。
- 83 [00:10:28.36] 小朋友 7、8、9、10、11。
- 84 [00:10:30.66] 老師 11，所以他多了1個。那我的周長會變多少？會變多少，我把這個拿掉。
- 85 [00:10:37.21] 小朋友 22。
- 86 [00:10:38.18] 老師 22嗎？
- 87 [00:10:38.68] 小朋友 20。
- 88 [00:10:39.78] 小朋友 21。
- 89 [00:10:40.45] 老師 21嗎？
- 90 [00:10:41.06] 小朋友 因為他數只有3個邊，他只有多出3個邊。
- 91 [00:10:46.56] 老師 剛不是有人說22嗎？22怎麼來的？來。22，你又改22，為什麼？來，你自己補充。
- 92 [00:10:52.80] 小朋友 本來沒有一個周長，拿掉，這邊就變成1個周長。
- 93 [00:10:55.91] 老師 他說本來這裡面會不會算周長？不會，拿掉的時候他又要算，所以是22。
- 94 [00:11:03.68] 小朋友 22。
- 95 [00:11:05.18] 老師 好，來，我們請第2組的小朋來幫我們算，你們的周長為什麼是23。
- 96 [00:11:11.30] 小朋友 17、18、19、20、21、22。
- 97 [00:11:16.04] 老師 ?，到底22還23？
- 98 [00:11:18.68] 小朋友 22。
- 99 [00:11:19.99] 老師 22，所以他們也沒有贏，大家都22。目前還有這組，搞不好他真的23，也許這組贏。來，第3組。
- 100 [00:11:29.46] 小朋友 20、21、22。
- 101 [00:11:31.58] 老師 要改22嗎？
- 102 [00:11:34.00] 小朋友 22。
- 103 [00:11:34.53] 老師 22，好，所以呢我們剛出來的是面積10片，周長22段。
- 104 [00:11:41.56] 小朋友 1、2、3...17、18、19。
- 105 [00:11:49.19] 老師 所以18對不對？還是19？不記得了，好，那這樣子我們看你從哪裡數，你要從哪一個開始數？
- 106 [00:11:59.77] 小朋友 這邊。
- 107 [00:12:00.01] 老師 好，從這一個開始數。好，這個數過了，從這裡開始喔。
- 108 [00:12:04.33] 小朋友 1、2、3...16、17、18。
- 109 [00:12:10.84] 老師 好，玩第2個，我要比周長比較短，又11片正方形片來拚，來，小組討論。
- 110 [00:12:36.56] 老師 要最短，為什麼他這樣會是最短。
- 111 [00:12:45.37] 老師 好，來，小朋，你們剛剛已經拚出你們那一組的最佳圖形，你有什麼發現嗎？
- 112 [00:12:53.12] 小朋友 我發現每一組拼的都一模一樣。

- 113 [00:12:56.12] 小朋友 周長每一組都是14段，然後面積也都是11片。
- 114 [00:13:01.19] 老師 好，我們來看一下哦，你發現你要怎麼去獲勝，比如說我要比長，周長最長，周長最短，你要怎麼去找出那個周長最長或者周長最短的，你有什麼想法？
- 115 [00:13:16.07] 小朋友 要凸出來才會有多的周長。
- 116 [00:13:20.12] 老師 就是圖形要凸出來比較多，就會周長比較？
- 117 [00:13:24.45] 小朋友 長。
- 118 [00:13:24.63] 小朋友 如果你是比較長的話，你就把全部的拼成一條直線。然後，如果是比短的話，你就把他全部集中在一個方塊裡面。
- 119 [00:13:37.27] 老師 剛剛他說，這樣子很長的話，這樣子周長會比較長。把他集中這一塊，他的周長會比較短。你有沒有注意到這個，邊邊相鄰，這裡邊跟邊碰在一起叫邊邊相鄰喔，數目比較多的時，他周長會比較多還比較短？
- 120 [00:13:59.74] 小朋友 會愈短。
- 121 [00:14:00.57] 老師 會愈短，為什麼？
- 122 [00:14:02.92] 小朋友 因為全部聚集在一起以後，裡面有些會算不到。
- 123 [00:14:09.45] 老師 那如果邊邊相鄰的數量比較少，那他的周長會怎麼樣？為什麼？誰可以說說看。
- 124 [00:14:18.94] 小朋友 因為如果把全部的聚集在一起。
- 125 [00:14:25.38] 老師 聚的在這邊。
- 126 [00:14:26.55] 小朋友 聚集在一起，然後這裡的周長就會愈來愈小。
- 127 [00:14:33.97] 小朋友 那個邊邊相鄰的數量比較多，因為他是一個一個黏在一起，不像比較少的，如果是比較少的話，他是會有很多間隔出來的。所以他算就會算比較多。如果是邊邊相鄰就少了，因為他集中在一起？然後中間那些都是不會算到，然後它的數量就會比較少。
- 128 [00:14:58.57] 老師 像這樣，他說聚集在一起，邊邊相鄰比較多，這外面就比較少，因為都算在裡面，沒有算到。那這裡邊邊相鄰比較少，沒有算到的就比較少，所以他周長會比較長。好，面積一樣的時候，邊邊相鄰的數量多，它的周長會比較短，因為都裡面了。很多都沒有算到。面積一樣，邊邊相鄰的數比較少的時候，它的周長比較長。
- 129 [00:15:33.41] 老師 好，那我們請你來看看，用你的紀錄單，跟你的剛剛遊戲的經驗，你覺得面積和周長會有什麼關係？好，面積一樣，圖形的周長會怎麼樣？
- 130 [00:15:50.61] 小朋友 不一定。
- 131 [00:15:51.67] 老師 不一定一樣。那老師問你，如果周長一樣，面積也一樣，他的形狀都一樣嗎？
- 132 [00:15:58.41] 小朋友 不一定。
- 133 [00:15:58.72] 老師 也不一定一樣對不對，大家來想想看，面積一樣可以找到什麼？
- 134 [00:16:05.71] 小朋友 面積一樣，可以找到不同的圖形。
- 135 [00:16:09.03] 老師 不同的現狀的圖片，很棒。
- 136 [00:16:11.45] 小朋友 面積一樣可以找到...周長不一樣的圖形。

- 137 [00:16:18.20] 老師 所以周長一樣，面積一樣，圖形的形狀不一定一樣對不對？
- 138 [00:16:23.46] 小朋友 對。
- 139 [00:16:23.88] 老師 好，老師這個圖是用面五的去排，然後有不一樣的周長對不對。老師要小朋友來舉例囉，怎樣是面積一樣，他的周長不大一樣。
- 140 [00:16:38.56] 小朋友 第四個圖形。
- 141 [00:16:40.16] 老師 因為第4個圖形。
- 142 [00:16:41.13] 小朋友 跟第1個圖形...。
- 143 [00:16:42.78] 老師 好，第4個圖形跟第1個圖形，然後呢？
- 144 [00:16:47.31] 小朋友 周長不一樣，可是面積一樣。
- 145 [00:16:51.68] 小朋友 11和12。
- 146 [00:16:52.96] 老師 好，11跟12。
- 147 [00:16:54.79] 小朋友 因為面積都是5，周長是12，可是它們的形狀不一樣。

~影片結束~

## 國 中 小 數 學 公 開 觀 課 記 錄 表

單元名稱	班級	日期與時間	教學者	觀察者
觀察 主 軸	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-bottom: 5px;">學習者</div> 甲：有趣、有感 乙：有自己的想法、有機會表達(生生共建)		二十一世紀八大思考素養： 批判性思考、研究與探究、自主堅持、資訊使用、系統性思維、溝通、 反思、創造力。	
	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-bottom: 5px;">教學任務</div> 丙：診斷與共建(師生)			
教學任務			學習活動	

教學者活動	學生活動

## 國 中 小 數 學 公 開 議 課 記 錄 表

請在橫軸中填入你在觀課過程中看見的 2 至 3 個八大思考素養，並搭配縱軸中甲、乙、丙三個面向，以事件具體描述的方式完成下列表格。

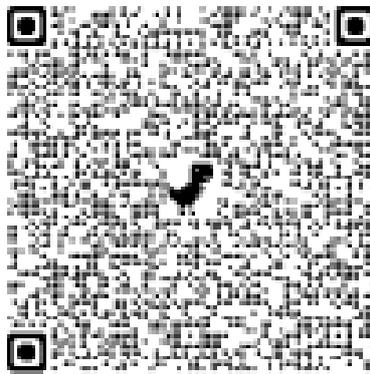
八大思考 素養 三個面向			
<b>甲：有趣、有感</b> (學習活動有趣，能引動學習思考；展現學生有感的學習。)			
<b>乙：有自己的想法、有機會表達</b> (學生主動參與，展現生生共建)			
<b>丙：診斷與共建</b> (教學任務適時介入診斷，提供師生共建機會。)			



〔國中〕

空間與形狀

〈拼板遊戲與畢氏定理〉



<https://www.youtube.com/watch?v=YNgirVVDipo>

## 109 素養奠基包共備工作坊手冊一—時程表

模組名稱： 拼板遊戲與畢氏定理

影片教學者：賴姵伶老師 設計者：賴姵伶老師、蘇漢哲老師

時間分配	階段	分組討論主題	全體討論議題	綱目
50 分	啟動觀察	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 影片中，我看到什麼？</li> <li>1. 學生學習</li> <li>2. 教師介入</li> <li>3. 探究活動設計</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 教科書怎麼教？</li> <li>• 困難點？</li> <li>• 教學的進路？</li> <li>• 教材教法？</li> <li>1. 依照課本</li> <li>2. 課本為主+活動</li> <li>3. 活動為主+課本</li> <li>4. 設計活動</li> </ul>	壹 一、教材地位 二、教學目標 三、教科書怎麼寫？ 四、可能的教學進路 五、您目前的教學？ 六、觀看教學影片 七、你看到什麼？
70 分	實作評價	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 活動中，素養在哪裡？</li> <li>1. 激發思考</li> <li>2. 診斷學習</li> <li>3. 情緒分享</li> <li>4. 語言演化</li> <li>• 推進素養的策略：活動、提問、評量</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 各活動中的學習目標？</li> <li>• 活動的關鍵設計？達到什麼效果</li> <li>• 在哪裡感覺到素養？</li> </ul>	貳 一、活動可分成哪幾個部分 二、活動的關鍵 三、活動背後的想法 四、策略 五、活動中的素養 六、推進素養提問
60 分	反思 進教室	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 課堂中，我會怎麼用？</li> <li>• 如何有效率地使用此模組？(可刪、可接、可補、可改變)</li> <li>• 在您的課堂中使用的意願？</li> <li>1. 依照課本</li> <li>2. 以課本為主+模組</li> <li>3. 以模組為主+課本</li> <li>4. 依照模組</li> </ul>	各組分享報告	參、您的教學…



簡報



# 109素養奠基包共備工作坊 拼方板遊戲與畢氏定理

影片拍攝：彰化縣立彰興國中 賴姍伶老師  
課程設計：賴姍伶老師、蘇漢哲老師  
指導教授：國立彰化師範大學 秦爾聰副教授



*Let's go*

- |    |       |       |
|----|-------|-------|
| 01 | 啟動觀察  | 50min |
| 02 | 實作評價  | 70min |
| 03 | 反思進教室 | 60min |

# 國中數學 幾何 最關鍵的單元？

## 畢氏定理

s-IV-7

理解畢氏定理與其逆敘述，並能應用於數學解題與日常生活的問題

- 子目標
  - 理解畢氏定理
  - 理解其逆敘述

# 說說看 教科書怎麼教？



## 可能的教學進路有... 困難點？

### 【路徑一】

埃及→指稱介紹→方格→論證(邊長 $a+b$ 正方形)→畢達哥拉斯、郵票、商高定理

### 【路徑二】

指稱介紹→地磚故事→方格→論證(兩正方形)→商高定理、百牛定理

### 【路徑三】

指稱介紹→方格→論證(邊長 $c$ 正方形)→畢達哥拉斯、郵票、商高定理

<https://youtu.be/YNgirVVDip0>

		從影片中哪些活動能觀察到以下面向？	你的評論
學生學習	情緒—興趣		
	生生共建		
	語言演化		
	有感—理解		
介入師	激發思考		
	診斷		
	師生共建		
設計活動	探究活動設計流程		

## 直覺有什麼特色...

根據表中的項目分析影片：

- 學生學習
- 教師介入
- 探究活動設計

小組討論Go!

## 一、活動可以分成哪幾個部分呢？



## 二、活動的關鍵

- ◆說說看哪一些是活動的**關鍵設計**？  
想達成什麼學習目標？
- ◆說說看哪一些是活動的**關鍵問句**？  
想達到什麼效果？

在哪裡**感覺**到**素養**？

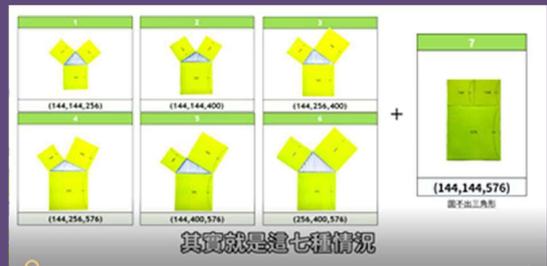
### 活動一 操作方板組成三角形



熟悉拼板操作  
看到▲不同拼法



挑戰最多不同  
排法啟動思考



五個正方形144、144、256、400及576

學習目標：

## 活動二 閃卡猜測三角形



做→記錄  
→猜測→檢驗  
Do-Talk-Record



停頓點思考  
組內分享發現



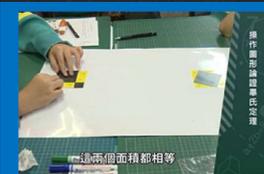
觀察12回紀錄  
歸納共建結果



呈現各組結果  
建構較佳表達

學習目標：

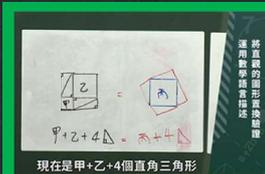
## 活動三 操作圖形論證畢氏定理



圖卡翻面(一般化)  
操作圖形論證



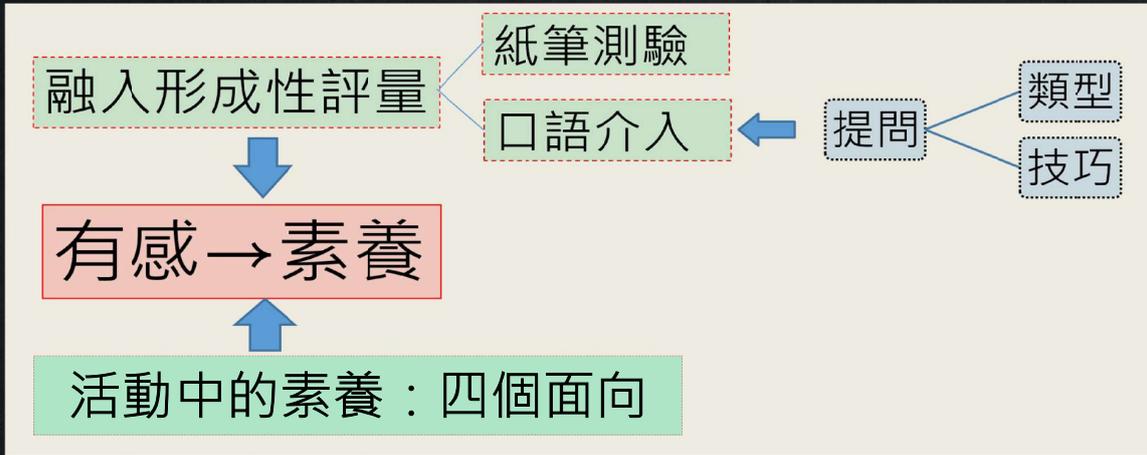
拿走四塊所以這個一樣相等



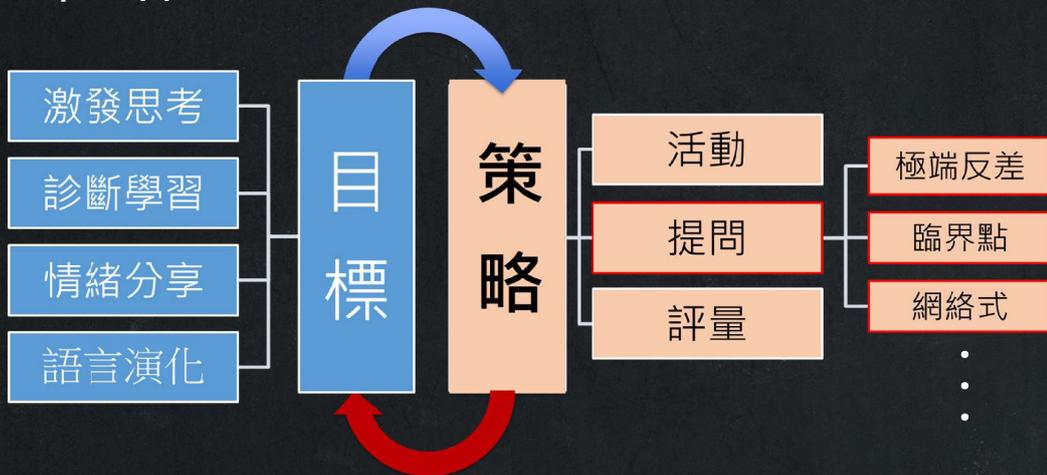
直觀的圖形置換  
轉化為抽象描述

學習目標：

### 三、活動背後的想法



### 四、策略



## 五、活動中的素養

### 激發思考

[00:00:18.34]

老師：第一個任務就是請你用你這五個拼板，盡可能地組合出各種不同的三角形。

### 診斷學習

[00:09:38.87]

老師：這裡你再想想看，在這個情況下，好像少了誰，第五組，少了誰？你想想看。

## 五、活動中的素養

### 情緒分享

[00:12:32.86]

學生：這兩個面積都相等。  
 學生：我知道了。  
 學生：哇，好棒。

### 語言演化

[00:08:39.99]

學生：你看這個不成，它是不是也是小於，它們兩個相加的面積是不是也是小於這個，但它就不是鈍角。  
 學生：所以後面要寫且。  
 學生：對，且兩個小正方形邊長相加...不小於。

分組  
 討論  
 Go!

## 六、推進素養提問

例一

老師：來，我想要問一下，你到現在為止，四題都對的舉手。  
這厲害囉，我們問一下瑞育，你可以告訴我，你是怎麼，有沒有什麼絕招，可以這麼快四題都猜對？

學生：就大於、小於、等於而已。

老師：大於、小於、等於。你願不願意再透露多一點？

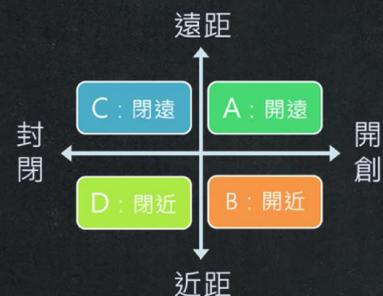
學生：不要。

老師：他說他不要，他要保持他的秘密。

教師增加提問：這位同學說大於、小於、等於，活動中有哪些東西會讓你們看見這三種關係？

網絡式提問

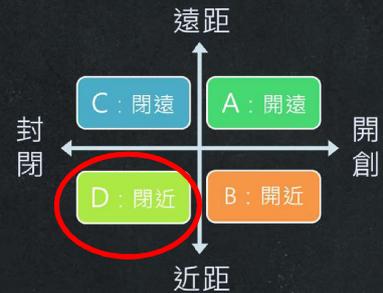
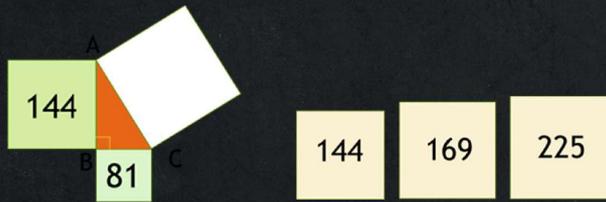
C類：封閉式遠距思考



參考資料來源：臺師大數學系 謝豐瑞教授

例二

時機：活動二，12組閃卡結束，小組討論結束  
 原提問：選選看，若以三塊正方形拼板圍出直角 $\triangle ABC$ ，則下列何者是以 $\overline{AC}$ 為邊的正方形面積？

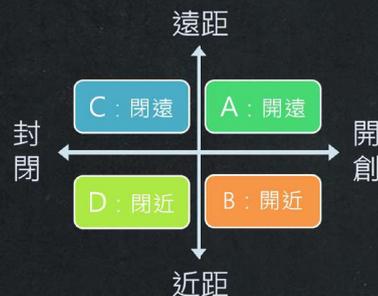


新提問：如果有三個正方形面積分別是81、100、181，圍出的三角形一定不是直角 $\triangle$ ，你同意嗎？為什麼？

極端反差提問

B類：開創性近距思考

**D → B**

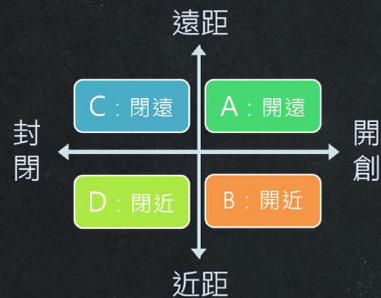


新提問：請拿出邊長12、12、17的正方形圍圍看，會出現哪一種三角形呢？你怎麼知道的？

臨界點提問

B類：開創性近距思考

D → B



壹、啟動觀察

貳、實作評價

參、反思進教室

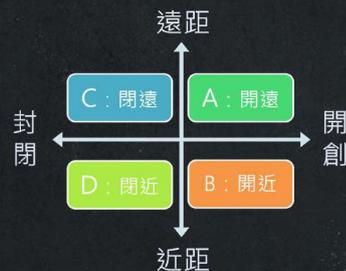
例三

時機：活動三，論證結束

新提問：如果不用正方形，  
能不能設計別種形狀的拼板？

網絡式提問

A類：開創性遠距思考



## 想增加的素養 v.s 拼方板遊戲

- ▶ 學生實際操作三個正方形圍出三角形時，製造可能出現的**認知衝突**：

1. 圍出的不一定會是直角三角形

情緒分享

知數能學

2. 看到直角的位置不一定在底角，從多面向觀察圖形，更清楚掌握幾何的本質。

- ▶ 透過**奠基活動**觸發學習動機，促進**有感學習**

情緒分享

知數能學

操作拼板，看到除了  $a^2 + b^2 = c^2$

尚有  $a^2 + b^2 > c^2$  及  $a^2 + b^2 < c^2$  的關係存在，打破僵化的思考路徑。

- ▶ 感受**三一律**在探討關係時是思考分類的好工具

知數能學

語言演化

- ▶ 透過觀察與歸納，來**推論**及**類比**正方形面積關係與三角形種類的關聯性

知數能學

語言演化

## 您的教學.....



此模組可以使用嗎？  
您會怎麼使用？  
什麼時機點用？

此模組如何有效率用？  
可刪？可接？可補？  
直接用？銜接用？

**在您的課堂  
使用的意願？**



分組討論Go!





*Thank you !*

A large, light green calligraphic graphic in the background, featuring a vertical stroke on the left and a large, sweeping character on the right, possibly '道' (Dào) or '道' (Dào).

# 綱目內容

# 109 素養奠基包共備手冊-拼方板遊戲與畢氏定理

彰興國中 賴姍伶

## 壹、 啟動觀察 (50 分鐘)

### 一、教材地位

108 課綱學習重點：

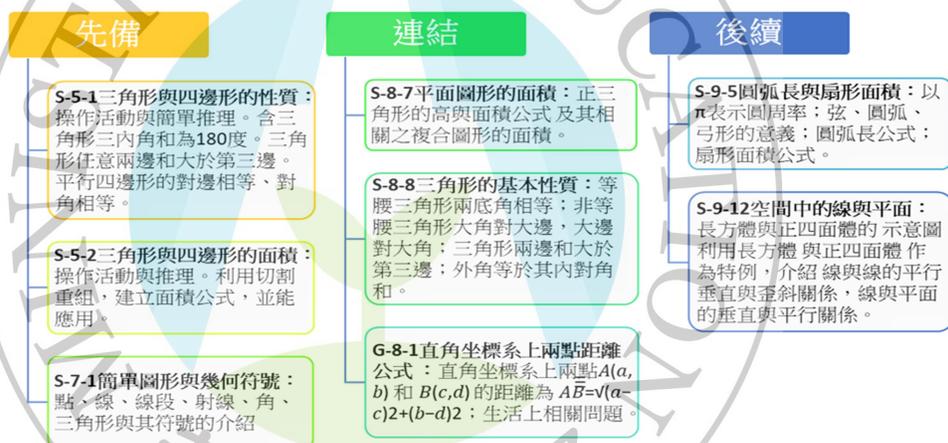
#### (一) 學習表現

s-IV-7 理解畢氏定理與其逆敘述，並能應用於數學解題與日常生活的問題

#### (二) 學習內容

S-8-6 畢氏定理：畢氏定理(勾股弦定理、商高定理)的意義及其數學史；

畢氏定理在生活上的應用；三邊長滿足畢氏定理的三角形必定是直角三角形。



### 二、教科書的內容

(一) 數學史：畢達格拉斯的故事、地磚的故事……

(二) 直角三角形指稱的介紹

(三) 透過方格輔助計算面積發現直角三角形三邊所作正方形間的面積關係

(四) 利用課本附件拼圖操作圖形置換進行畢氏定理證明

(五) 將畢氏定理應用於數學解題與日常生活的問題

### 三、教學進路

(一) 說說看教科書怎麼教？教學的困難點？學生學習的困難？

就學習目標「理解畢氏定理」，討論可能的教學進路：

【路徑一】

埃及→指稱介紹→方格→論證(邊長 a+b 正方形)→畢達哥拉斯、郵票、商高定理

【路徑二】

指稱介紹→地磚故事→方格→論證(兩正方形)→商高定理、百牛定理

【路徑三】

指稱介紹→方格→論證(邊長 c 正方形)→畢達哥拉斯、郵票、商高定理

【路徑四】

例如：加入幾何動畫輔助、生活上具需求感的情境……

(二) 您目前的教學方式是：

1. 依照課本；
2. 課本為主+活動；
3. 活動為主+課本；
4. 設計活動；

#### 四、觀看與討論影片的第一印象

依照下表，分析影片中三個面向：學生學習、教師介入、探究活動設計，並進行小組討論。

		從影片中哪些活動能觀察到以下面向？	你的評論
學生學習	情緒—興趣		
	生生共建		
	語言演化		
	有感—理解		
教師介入	激發思考		
	診斷		
	師生共建		
探究活動設計	探究活動設計流程		

備註：

(一)【學生學習】分為以下向度：

- (1) 情緒是學生學習當下的情緒反應。
- (2) 生生共建部分是指學生之間互動來進行學習。
- (3) 語言演化是指學生用自己的語言來描述現象到學習數學專業用語之間的來回互動歷程。
- (4) 有感—理解就是學生在學習時對於所學習的知識有感，並能進一步理解所學習的知識。

(二)【教師介入】分為以下向度：

(1)激發思考指的是教師在教學過程中，引導生進行思考，包含觀察、分析、發現、推理、連結、溝通。

(2)診斷是教師在教學過程中診斷學生學習困難，並讓學生有調整想法的機會。

(3)師生共建指的是探討教師如何介入來協助學習。

(三)【探究活動設計】：就是本影片教學過程中的探究程序。

## 貳、實作評價 (70 分鐘)

一、教學活動可以分成哪幾個部分？對應的學習目標是什麼呢？

【活動一】：操作五個正方形方板，組成各種不同的三角形

《學習目標》：1.利用五種正方形邊長，了解三種長度可以拼出鈍角 $\Delta$ 、直角 $\Delta$ 、銳角 $\Delta$ 、不能圍出 $\Delta$ 。

2.覺知以「角」分類三角形，觀察正方形面積與三角形種類間的關係。

【活動二】：利用閃卡活動，請學生猜測 $\Delta$ 的種類，再驗證及紀錄。

《學習目標》：學生能透過學習單的紀錄，歸納出三角形種類與三個正方形拼板面積的關係。

【活動三】：操作直角 $\Delta$ ，論證畢氏定理。

《學習目標》：能將操作圖形置換法的結果，轉換成數學語言證明畢氏定理。

二、教學活動的關鍵

【活動一】：

(一) 關鍵活動

1.熟悉拼板操作看到▲不同拼法

2.用你這五個拼板，盡可能地組合出各種不同的三角形。

(二) 關鍵問句

1. 老師：我問你，你有沒有拼出這六個以外的？

2. 老師：發現當你的這些正方形拼板有大小不同的時候，它就會出現哪一些三角形？

(三) 效果

1.這個模組使用有限的 5 個正方形拼板進行活動一，課程目標明確，又有課程延展性，可以讓學生多學一些

2.在活動一都鬥志高昂，大家都會想要可以拚出「最多」，覺得可以善用這樣的激勵，帶領學生進行一步思考很流暢。

### 【活動二】：

#### （一）關鍵活動

- 1.閃卡活動猜測三角形種類
- 2.停頓點小組進化
- 3.觀察 12 回紀錄，歸納共建結果
- 4.呈現各組結果，建構較佳表達

#### （二）關鍵問句

- 1.老師：有沒有什麼絕招，可以這麼快四題都猜對？
- 2.學習單的問題：你是觀察正方形拼板的什麼條件猜測會圍出的三角形種類？

#### （三）效果

- 1.閃卡活動的刺激帶動學生的情緒維持正向，臆測錯誤也馬上修正，還能反思後主動提問，然後對同學的提問，也提出解決問題的方法，學生的潛力被激發了。
- 2.帶入活動二的臆測並搭配閃卡，普遍學生對數學是都較缺乏自信的，但因為經過操作拼板的歷程、小組對話，會對自己的臆測更有信心
- 3.學生透過小組進化時間，發展表達思維，達成生生共建數學。
- 4.老師的教學語言常常引動學生的學習情緒，「組間進化」取代「小組討論」，讓學生覺得每一次討論都充滿正面積極的學習意涵，漸漸轉正情緒，學習就會很自然地發生。
- 5.老師會在討論或活動操作過程中設置空白跟停頓點，可以讓學生先整理自己的思緒，診斷學生的學習後再繼續。
- 6.學生的討論完全可以達到知數能學，將敘述轉換成數學的語言，甚至在[編號 64]提出「且」這樣的數學語言，最後學生也能透過數學的語言說明如何圍成直角、鈍角、銳角三角形。

### 【活動三】：

#### （一）關鍵活動

- 1.圖卡翻面(一般化)操作圖形論證
- 2.直觀的圖形置換運用數學語言描述

(二) 關鍵問句

老師：那我們就在想，如果反過來呢？你是先有一個直角三角形，從它的三邊長，做出正方形，這兩個小的正方形的面積和，是不是一定會等於這個大正方形的面積呢？

(三) 效果

1. 學生透過動手做、玩遊戲、解決任務的時候，能思考三個正方形面積與三角形種類的關係，進而將圖像表徵表示成代數表徵。
2. 學生能看清楚幾何圖形實際變化的情形，降低難度，提升學習意願
3. 讓學生實作應用幾何的面積概念，來驗證畢氏定理。

三、活動中的素養

活動中的素養	知數能學 (激發思考、診斷學習)	探究力
		批判思考
		系統思考
	情緒分享	創造力
		觸發察覺
		支撐意願
		轉正情意
	語言演化	點燃思考
		描述
		溝通 表達

參考數學單元素養模組包設計的四個原則，討論影片中的素養：

(一) 激發思考：目標：「引動學生的內在學習動機」

例：[00:00:18.34] 老師：第一個任務就是請你用你這五個拼板，盡可能地組合出各種不同的三角形。

(二) 診斷學習：目標：「診斷概念，促進思考」

例：[00:09:38.87] 老師：這裡你再想想看，在這個情況下，好像少了誰，第五組，少了誰？你想想看。

(三) 情緒分享：目標：「情緒分享當作介入策略，累積情緒，培養態度，促進易思」

例：[00:12:32.86] 學生 1：這兩個面積都相等。

學生 2：我知道了。

學生 1：哇，好棒。

(四) 語言演化：目標：「自然語言到形式語言的過渡，表達與溝通」

例：[00:08:39.99] 學生 1：你看這個不成，它是不是也是小於，它們兩個相加的面積是不是也是小於這個，但它就不是鈍角。

學生 2：所以後面要寫且。

學生 1：對，且兩個小正方形邊長相加...不小於。

四、推進素養的提問



新提問設計促發素養的培養與評量可參考底下幾個例子：

(一)【活動二提問類型的轉化】：新增提問，診斷學習

程序	提問類型	提問技巧	活動中素養
活動進行中	C類：封閉性遠距思考	臨界點提問	情緒分享 激發思考
時機	[06:19.34]老師：大於、小於、等於。你願不願意再透露多一點。 [06:25.28]學生：不要。 [06:25.94]老師：他說他不要，他要保持他的秘密。		
說明	1、原提問中，老師說他要保持他的秘密，就是一種情緒分享，同時也激發其他不知道原因的學生進行思考。 2、那我們還有沒有策略可以讓學生多說一點？		
教師增加提問	老師：這位同學說大於、小於、等於，活動中有哪些東西會讓你們看見這三種關係？ →這是一種「封閉式遠距思考」，提問技巧為「網絡式提問」。		
說明	因為學生看到的是「數字」，藉由增加提問中的「關係」兩字，會讓學生思考「數字」還可以做怎樣的組合。也讓還不知道原因的學生有較明確的指引，有機會進行思考。		

(二)【活動二提問類型的轉化】：新增提問，診斷學習

程序	提問類型	提問技巧	活動中素養
活動進行中	B類：開創性近距思考	極端反差提問	知數能學 語言演化
時機	活動二，12組閃卡結束，學生進行組內進化後，再提問。		
教師提問	如果有三個正方形面積分別是81、100、181，圍出的三角形一定不是直角 $\Delta$ ，你同意嗎？為什麼？		
說明	學生透過組內進化的討論，應該可以歸納出 $a^2 + b^2 = c^2$ 的結論，但是學生對於面積181的正方形，一定會產生疑惑。		

(三)【活動二提問類型的轉化】：新增提問，診斷學習

程序	提問類型	提問技巧	活動中素養
活動三	B類：近距開創	臨界點提問	知能數學
時機	【活動二】之後		
教師提問	請拿出邊長12、12、17的正方形圍圍看，會出現哪一種三角形呢？你怎麼知道的？		
說明	修改提問可以激發學生更開創性的思考		

(四)【活動三提問類型的轉化】：新增提問，延伸外拓

程序	提問類型	提問技巧	活動中素養
活動後	A類：開創性遠距思考	知數能學提問	激發思考
原提問	90 [00:14:42.72] 老師 這是前面的命題對不對？		
新提問	如果不用正方形，能不能設計別種形狀的拼板？		
說明	學生一直被我們帶著思考正方形，是否可以想想只能用正方形嗎？還有沒有別的形狀也可以		

## 參、反思進教室（60 分鐘）

一、請依前面實作評價的討論與分享，想想看，在您的畢氏定理教學單元中：

- (一) 你會如何使用此模組??
- (二) 如何有效率地使用此模組?(可刪、可接、可補、可改變)
- (三) 在您的課堂中使用的意願?

1. 依照課本
2. 以課本為主+模組
3. 以模組為主+課本
4. 依照模組

二、將此模組融入教學的示例：

(一) 單元前與單元中

1. 【可接】

【融入我的教學】之一

使用時間	有效率使用	活動中素養
<input type="checkbox"/> 單元前 <input checked="" type="checkbox"/> 單元中 <input type="checkbox"/> 單元後	<input type="checkbox"/> 可刪 <input checked="" type="checkbox"/> 可接 <input type="checkbox"/> 可補	<input checked="" type="checkbox"/> 知數能學 <input checked="" type="checkbox"/> 情緒分享 <input checked="" type="checkbox"/> 語言演化
操作活動一、二就能有效學習畢氏定理與相關懸缺課程，又能銜接課本教材，一堂課的操作非常值得。		

2. 【可補】

【融入我的教學】之二

使用時間	有效率使用	活動中素養
<input type="checkbox"/> 單元前 <input checked="" type="checkbox"/> 單元中 <input type="checkbox"/> 單元後	<input type="checkbox"/> 可刪 <input checked="" type="checkbox"/> 可接 <input checked="" type="checkbox"/> 可補 <input type="checkbox"/> 可改變	<input checked="" type="checkbox"/> 知數能學 <input checked="" type="checkbox"/> 情緒分享 <input checked="" type="checkbox"/> 語言演化
<p>【活動三】論證</p> 可於單元中，以實作的方式讓學生了解如何證明畢氏定理。 可以只使用 8 張直角三角形，以及兩張一模一樣大的正方形紙張。可以免去學生對於拼起來之後，邊是否是直線的疑慮		

### 3.【可改變】

#### 【融入我的教學】之三

使用時間	有效率使用	活動中素養
<input type="checkbox"/> 單元前 <input checked="" type="checkbox"/> 單元中 <input type="checkbox"/> 單元後	<input type="checkbox"/> 可刪 <input type="checkbox"/> 可接 <input type="checkbox"/> 可補 <input checked="" type="checkbox"/> 可改變	<input checked="" type="checkbox"/> 知數能學 <input checked="" type="checkbox"/> 情緒分享 <input checked="" type="checkbox"/> 語言演化
<p>(活動一)在請學生找出有幾種三角形後，我會請各組提出自己剛剛拼出過的三角形，每組輪流說出一種，營造刺激的學習氛圍，並搭配臨界值提問，引發學生思考實際上有「七種邊長組合」，更進一步請學生提出三角形種類與正方形邊長間的關係，由學習單的引導，讓學生進行語言演化，得知兩邊之和大於第三邊的關係。</p>		

## (二) 單元後

### 1.【可接】

#### 【融入我的教學】之四

使用時間	有效率使用	活動中素養
<input type="checkbox"/> 單元前 <input type="checkbox"/> 單元中 <input checked="" type="checkbox"/> 單元後	<input type="checkbox"/> 可刪 <input checked="" type="checkbox"/> 可接 <input type="checkbox"/> 可補 <input type="checkbox"/> 可改變	<input checked="" type="checkbox"/> 知數能學 <input type="checkbox"/> 情緒分享 <input checked="" type="checkbox"/> 語言演化
<p>我會考慮將活動一放在第四冊「三角形的邊長」這個單元之後，作為檢核學生對於三角形三邊長的認識，國小提到「角度」的判斷，但對於三角形三邊長只有略微帶過，學生對於三角形三邊長觀念較為薄弱，活動一中並未真正進入正方形拼板面積與三角形的關係，在這邊可以讓學生著重在觀察圍成三角形的三邊長關係。</p>		

## 【附錄一】與教學模組深交

### 1. 根據素養導向原則分析教學模組活動

以下以影片逐字稿為本，分成活動一、活動二及活動三，依據素養導向原則進行教學模組活動的分析。

#### (1) 活動一

【活動一】：操作五個正方形方板，組成各種不同的三角形				
《學習目標》：覺知以「角」分類三角形，觀察正方形面積與三角形種類間的關係。				
利用五種正方形邊長，了解三種長度可以拼出鈍角 $\Delta$ 、直角 $\Delta$ 、銳角 $\Delta$ 、不能圍出 $\Delta$ 。				
時間	發言者	內容	素養原則	
1 [00:00:18.34]	老師	把你們的拼板舉起來，讓你們同學看一下都有頂點碰頂點對不對？這樣是不是才有用它的邊長去圍出了三角形。第一個任務就是請你用你這五個拼板，盡可能地組合出各種不同的三角形。	激發思考	
2 [00:01:01.84]	學生	你要把三角形畫起來。	情緒分享	
3 [00:01:06.49]	學生	你拿最最大的跟最小的就好。		
4 [00:01:09.41]	學生	不行，那樣拚不起來。		
5 [00:01:13.08]	學生	拿最大跟最小。		
6 [00:01:17.69]	學生	太短了。		
7 [00:01:18.98]	學生	這樣太短。		
8 [00:01:21.54]	學生	這裡也沒有頂點對頂點。		
9 [00:01:34.05]	老師	來，我先問一下，第一組你拼出幾種？你們拼出4種。好，第三組。		
10 [00:01:38.72]	學生	5種。		
11 [00:01:39.28]	老師	5種。第八組。		
12 [00:01:41.24]	學生	3種。		
13 [00:01:41.51]	老師	3種。好，目前看起來第三組5種最多對不對，但是你拚出來有沒有重複呢？或者是到底對不對，我們一起來看一下好不好，有拼出144、144、256的。……256、400、576的有沒有？來，我問你，你有沒有拼出這六個以外的？	診斷學習 激發思考	
14 [00:02:18.84]	學生	有。		

15	[00:02:20.35]	老師	好，來，請說，144。	
16	[00:02:21.26]	學生	144、144、576。	
17	[00:02:26.77]	老師	576，他們有拼出這一個。各位同學你要不要拼拼看？	激發思考 診斷學習
18	[00:02:32.00]	學生	我們就照著那個拼，144。	
19	[00:02:35.39]	學生	144。	
20	[00:02:42.41]	學生	可是 $12+12=24$ ，怎麼可能拼得出來。	情緒分享
21	[00:02:46.62]	老師	你看一下在這裡，打斜線是不是就是我們圍出來的三角形，請你觀察一下，你看到哪些不同種類的三角形？直角。	激發思考
22	[00:03:11.68]	學生	銳角。	
23	[00:03:12.50]	老師	銳角、鈍角，有一些很難判別，像這個到底是不是直角，你是不是應該用一點工具。所以請問你，如果你今天要用工具，你要什麼工具來量？	激發思考
24	[00:03:21.52]	學生	量角器。	診斷學習
25	[00:03:22.14]	老師	喔，好喔。	
26	[00:03:22.88]	學生	格子。	診斷學習
27	[00:03:23.57]	老師	格子，什麼格子？	激發思考
28	[00:03:24.99]	學生	格子板。	診斷學習
29	[00:03:26.14]	老師	你們有格子板，所以你也可以拼在格子板上對不對，大家可以看到格子板，因為格子板有...的跟直的線對不對，還可以怎樣？	激發思考
30	[00:03:35.32]	學生	拿另外一塊。	診斷學習
31	[00:03:36.38]	老師	拿另外一塊，超讚的。每一個正方形角度都是幾度？90度。當我們在看的時候，就發現當你的這些正方形拼板有大小不同的時候，它就會出現哪一些三角形？銳角、直角跟什麼？	激發思考
32	[00:03:52.63]	學生	鈍角。	診斷學習
33	[00:03:52.75]	老師	鈍角對不對。現在大家仔細觀察看看，老師像這樣操作正方形拼板的時候，圖形有什麼樣的變化呢？這會跟你等一下的閃卡遊戲有關係喔。	激發思考

(2)活動二

**【活動二】**：利用閃卡活動，請學生猜測 $\Delta$ 的種類，再驗證及紀錄。

**《學習目標》**：學生能透過學習單的紀錄，歸納出三角形種類與三個正方形拼板面積的關係。

34	[00:04:09.92]	老師	挑戰1，來，5秒鐘找到這三塊拼板，請開始動作。好，因為我們等一下預測，用你的第六感去預測它，不是把它拼出來。好，來，現在請你把訊息填進去你的學習單裡面，來，123掀牌。現在圍圍看，自己檢核一下，圍圍看。請問你出來是哪一種三角形？	激發思考
35	[00:05:18.03]	學生	銳角。	
36	[00:05:18.51]	老師	對，銳角三角形。挑戰2，開始。100、144、400，好，你拼出來的是什麼三角形？	
37	[00:05:27.98]	學生	鈍角。	
38	[00:05:29.10]	老師	鈍角三角形。挑戰3，開始。64、225、289，好，來，拼拼看，你用什麼方法檢核。	
39	[00:05:40.66]	學生	我用格子板上面的格子。	
40	[00:05:42.97]	老師	我們繼續進行挑戰4，來，預備，開始。144、225、225。掀牌。出來是哪一種三角形？	
41	[00:05:54.02]	學生	銳角。	
42	[00:05:55.49]	老師	對，銳角三角形，來，我想要問一下，你到現在為止，四題都對的舉手。這厲害囉，我們問一下瑞育，你可以告訴我，你是怎麼，有沒有什麼絕招，可以這麼快四題都猜對。	診斷學習 情緒分享
43	[00:06:17.56]	學生	就大於、小於、等於而已。	
44	[00:06:19.34]	老師	大於、小於、等於。你願不願意再透露多一點。	
45	[00:06:25.28]	學生	不要。	
46	[00:06:25.94]	老師	他說他不要，他要保持他的秘密。挑戰7，25、100、400。	情緒分享
47	[00:06:35.39]	老師	什麼都有喔，鈍角，你們都猜鈍角，你們呢？你們也猜鈍角。有些同學覺得它圍不出來對不對，好，來，圍圍看。	
48	[00:06:55.64]	老師	結果呢？	
49	[00:06:58.23]	學生	圍不出來。	
50	[00:06:58.59]	老師	它真的架不出來對不對，這個的確是排不出三角形，給你一分鐘的時間組內進化，開始。	

51	[00:07:07.89]	學生	小的加起來大於大的，就是銳。	語言演化
52	[00:07:11.53]	學生	銳嗎？	
53	[00:07:12.61]	學生	小的加起來小於大的，就是鈍。小的加起來等於大的，就是直角。如果小的邊長加起來，比大的邊長加起來還要小，就是不成三角形。	
54	[00:07:29.58]	學生	這兩個加起來 37，這個小於它。	
55	[00:07:34.37]	學生	我會了。	情緒分享
56	[00:07:36.67]	老師	最後一題，開始。36、144、400，請找出你的正方形拼板。掀牌。是什麼樣的三角形？果然是排不出三角形，厲害了。現在你有這 12 組閃卡的一個結果，觀察上面的表，填寫一下你學習單下面的問題。	
57	[00:08:04.35]	學生	較小兩個面積和，小於最大面積。	語言演化
58	[00:08:09.95]	學生	等於鈍角。	
59	[00:08:13.07]	學生	就是說它們兩個相加的邊長不能小於大的邊長。	
60	[00:08:19.70]	學生	對，那不就不成立。	
61	[00:08:21.86]	學生	可是如果你的那個...就是你還要有個條件，比如說你鈍角，你還要有那個條件，不然的話就不會是三角形，就不能排成三角形。	
62	[00:08:39.47]	學生	好難。	情緒分享
63	[00:08:39.99]	學生	就是說如果它們兩個相加的話，面積是小於...，你看這個不成，它是不是也是小於，它們兩個相加的面積是不是也是小於這個，但它就不是鈍角。	語言演化
64	[00:08:54.38]	學生	所以後面要寫且。	
65	[00:08:56.13]	學生	對，且兩個小正方形邊長相加...不小於。	
66	[00:09:05.99]	學生	不能小於。	
67	[00:09:07.66]	學生	大正方形邊長。	
68	[00:09:14.10]	學生	我們這一組的結論是，如果 $a^2+b^2$ 如果大於 $c^2$ 的話，它就是銳角，但前提是它要 $a+b$ 會大於 $c$ 。 $a^2+b^2$ 如果小於 $c^2$ 的話，它就是鈍角。 $a^2+b^2$ 如果等於 $c^2$ ，它是直角。如果這三個， $a+b$ 如果小於 $c$ 的話，它就不會變成一個三角形。	語言演化 診斷學習
69	[00:09:38.87]	老師	這裡你再想想看，你們在這個情況下，好像少了誰，第五組，少了誰？你想想看。	診斷學習

70	[00:09:47.56]	學生	銳角三角形，兩個較小的三角形面積相加，然後大於...最大正方形的面積，就是銳角三角形，然後鈍角三角形就是兩個較小的三角形面積相加，要小於最大正方形的面積。然後且兩個較小的正方形邊長相加，不能小於等於最大正方形邊長，不然不能成一個三角形。然後直角三角形的話，就是兩個較小的三角形面積相加，要等於最大的正方形的面積。	語言演化 診斷學習
71	[00:10:23.81]	學生	我們這一組 a 跟 b 是表示較短的邊長，然後 c 就是較長的邊長。如果 $a^2+b^2$ 會小於 $c^2$ 的話，它就是鈍角。然後 $a^2+b^2$ 大於 $c^2$ ，它就是銳角， $a^2+b^2$ 等於 $c^2$ ，它就是直角。但是 $a+b$ 一定要大於 $c$ ，以上才可以成立。	

(3)活動三

**【活動三】**：操作直角 $\Delta$ ，論證畢氏定理。

**《學習目標》**：能將操作圖形置換法的結果，轉換成數學語言證明畢氏定理。

72	[00:10:47.14]	老師	那我們就在想，如果反過來呢？你是先有一個直角三角形，從它的三邊長，做出正方形，這兩個小的正方形的面積和，是不是一定會等於這個大正方形的面積呢？……我現在要做的證明，是要證明什麼？就是這兩個小正方形的面積加起來應該要等於誰？是不是大正方形的面積。	激發思考
73	[00:12:32.86]	學生	這兩個面積都相等。	
74	[00:12:36.48]	學生	我知道了。	情緒分享
75	[00:12:39.35]	學生	哇，好棒。	
76	[00:12:41.39]	學生	這裡是 a，這裡是 b，然後它是一個正方形，所以它這裡是 b，這裡是 a，然後這裡... 這裡這個是 b，然後它們這個底跟它的邊長是等長，所以它也是 b。然後它這個三角形的邊 a，正方形的這裡也跟它對齊等長，所以是 a。然後這裡，這裡也是，這裡的這裡跟這裡等長，所以這裡是 a，這也等長，所以是 b，這裡就是它們都一樣長。	語言演化
77	[00:13:24.07]	學生	這邊各有 4 個，4 個面積可以抵掉。	
78	[00:13:40.75]	學生	所以把這一塊三角形拿掉，跟一塊三角形一樣	

			思。	
79	[00:13:45.60]	學生	你是說這個扣掉的話。	
80	[00:13:47.82]	學生	這個還是一樣，這個扣掉還是一樣。	
81	[00:13:50.95]	學生	這有個小的。	
82	[00:13:52.11]	學生	沒有，他的意思是說...	
83	[00:13:54.10]	學生	我把黃色拿走一塊，比如說4 拿走一塊1，拿走一塊1，然後再拿走第二塊。	
84	[00:14:02.23]	學生	就拿走四塊還是一樣的面積。	
85	[00:14:03.29]	學生	拿走四塊是這個一樣相等。	
86	[00:14:07.81]	學生	這兩個，這個跟那個。	
87	[00:14:09.94]	學生	相等，面積一樣。	
88	[00:14:13.20]	學生	就是這兩個的面積已經是一樣的了，所以我們看，現在是甲+乙再加4個直角三角形，等於丙加4個直角三角形。所以四個直角三角形就可以抵消掉，這樣就會變成甲加乙等於丙。	語言演化 診斷學習
89	[00:14:29.00]	學生	在直角三角形中，它的ab是兩個股，然後c是它的斜邊。他推論出的是 $a^2+b^2=c^2$ 。	語言演化
90	[00:14:42.72]	老師	這是前面的命題對不對？	診斷學習
91	[00:14:44.70]	學生	那個圖就畫成一個是 $a^2$ ，然後這邊是 $b^2$ ，因為三角形是 $a$ 乘 $b$ 除以2，然後就四個三角形，所以就變 $2ab$ ， $c^2$ 也是四個三角形，所以也是 $2ab$ ，然後就推論出 $a^2+b^2=c^2$	語言演化 診斷學習
92	[00:15:08.96]	老師	好，來，給大家自己掌聲鼓勵。大家今天也完成了非常重要的任務。	

【附錄二】學習單

拼板遊戲 學習單

班級：\_\_\_\_\_ 座號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_ 組別：\_\_\_\_\_

任務：請依指示將取出的正方形拼成三角形，觀察並猜測會是哪一種三角形？

較小面積 (甲) $a^2$	較小面積 (乙) $b^2$	最大面積 (丙) $c^2$	較短邊長 $a$	較短邊長 $b$	較長邊長 $c$	較小兩個面積和 (甲+乙) $a^2+b^2$	關係 < = >	最大面積 (丙) $c^2$	圖出三角形種類	得分 ☐
									銳角△ 直角△ 鈍角△ 不成△	
									銳角△ 直角△ 鈍角△ 不成△	
									銳角△ 直角△ 鈍角△ 不成△	
									銳角△ 直角△ 鈍角△ 不成△	
									銳角△ 直角△ 鈍角△ 不成△	
									銳角△ 直角△ 鈍角△ 不成△	
									銳角△ 直角△ 鈍角△ 不成△	
									銳角△ 直角△ 鈍角△ 不成△	
									銳角△ 直角△ 鈍角△ 不成△	
									銳角△ 直角△ 鈍角△ 不成△	
									銳角△ 直角△ 鈍角△ 不成△	
									銳角△ 直角△ 鈍角△ 不成△	
									銳角△ 直角△ 鈍角△ 不成△	
									銳角△ 直角△ 鈍角△ 不成△	
									銳角△ 直角△ 鈍角△ 不成△	
									銳角△ 直角△ 鈍角△ 不成△	
									銳角△ 直角△ 鈍角△ 不成△	
									銳角△ 直角△ 鈍角△ 不成△	
									銳角△ 直角△ 鈍角△ 不成△	
									銳角△ 直角△ 鈍角△ 不成△	
									銳角△ 直角△ 鈍角△ 不成△	
									銳角△ 直角△ 鈍角△ 不成△	
									銳角△ 直角△ 鈍角△ 不成△	
									銳角△ 直角△ 鈍角△ 不成△	
									銳角△ 直角△ 鈍角△ 不成△	

Q1：請問你是觀察正方形拼板的什麼條件猜測將會圖出的三角形種類呢？

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Q2：觀察上表，請小組討論後，將發現判斷三角形種類的方法寫下來。

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Q3：觀察上表，你發現什麼情況下會圖不出三角形呢？

\_\_\_\_\_

## 圖形置換法 學習單

班級：\_\_\_\_\_ 座號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_ 組別：\_\_\_\_\_

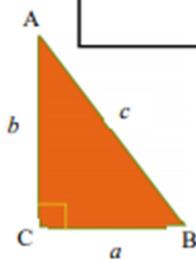
- 一、請利用附件，兩兩一組進行操作，將【2個小正方形+4個直角三角形】及【1個大正方形+4個直角三角形】，分別拼成正方形並畫下來。

Q1：請與同組夥伴分享，你是如何確定拼出的是正方形？(提示：構成正方形的條件是?)

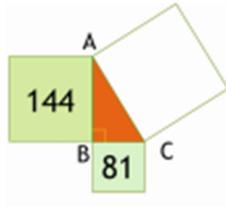
Q2：請與同組夥伴討論，要如何知道「拼出來的正方形面積相同」呢？

Q3：請小組討論，從幾何圖形來看，可以發現兩個小正方形(甲、乙)的面積與大正方形(丙)的面積之間具有什麼關係呢？

Q4：一般而言，描述三角形具備的條件時通常會使用邊長。請試著將 Q3 中的發現以數學式表示，推論出：



二、選選看，若以三塊正方形拼板圍出直角 $\triangle ABC$ ，則下列何者是以 $\overline{AC}$ 為邊的正方形面積？



三、選選看，若以三塊正方形拼板圍出直角 $\triangle ABC$ ，則下列何者是以 $\overline{BC}$ 為邊的正方形面積？



四、想想看，若 $\triangle ABC$ 是直角三角形，則 $\overline{AB}=?$



五、請將利用正方形拼板，設計一個目前課堂上尚未出現過的直角三角形邊長問題，並附上正確解答。

六、小試身手

--	--



逐字稿

## 影片「拼版遊戲與畢氏定理」逐字稿

時間	發言者	內容
1 [00:00:18.34]	老師	各位同學，我們今天要上一個非常有趣的一個課程，它叫做正方形的拚板，我等一下會用這些正方形拚板，拼出很多種不同的三角形。請你從這五個拚板裡面，先拿三個起來到你的格子板上，就是要用這些正方形的拚板，利用它的邊長，頂點對頂點的圍出三角形，把你們的拚板舉起來，讓你們同學看一下都有頂點碰頂點對不對？這樣是不是才有用它的邊長去圍出了三角形。第一個任務就是請你用你這五個拚板，盡可能地組合出各種不同的三角形。
2 [00:01:01.84]	小朋友	你要把三角形畫起來。
3 [00:01:06.49]	小朋友	你拿最最大的跟最小的就好。
4 [00:01:09.41]	小朋友	不行，那樣拚不起來。
5 [00:01:13.08]	小朋友	拿最大跟最小。
6 [00:01:17.69]	小朋友	太短了。
7 [00:01:18.98]	小朋友	這樣太短。
8 [00:01:21.54]	小朋友	這裡也沒有頂點對頂點。
9 [00:01:34.05]	老師	來，我先問一下，第一組你拼出幾種？你們拼出4種。好，第三組。
10 [00:01:38.72]	小朋友	5種。
11 [00:01:39.28]	老師	5種。第八組。
12 [00:01:41.24]	小朋友	3種。
13 [00:01:41.51]	老師	3種。好，目前看起來第三組5種最多對不對，但是你拚出來有沒有重複呢？或者是到底對不對，我們一起來看一下好不好，有拼出144、144、256的。有，好，很好。144、144、400，有的舉手。144、256、400，144、256、576的舉手，144、400、576的有沒有？256、400、576的有沒有？來，我問你，你有沒有拼出這六個以外的？>
14 [00:02:18.84]	小朋友	有。
15 [00:02:20.35]	老師	好，來，請說，144。
16 [00:02:21.26]	小朋友	144、144、576。
17 [00:02:26.77]	老師	576，他們有拼出這一個。各位同學你要不要拼拼看？
18 [00:02:32.00]	小朋友	我們就照著那個拼，144。
19 [00:02:35.39]	小朋友	144。
20 [00:02:42.41]	小朋友	可是 $12+12=24$ ，怎麼可能拼得出來。
21 [00:02:46.62]	老師	你為什麼拼得起來，你有沒有頂點對頂點？你再試試看，這五個正方形拚板，如果你要去組合出不同邊長的三角形，其實就是這七種情況，其中這個它會攤平，沒有辦法三解形，就變成這樣。你看一下在這裡，打斜線是不是就是我們圍出來的三角形，請你觀察一下，你看到哪些不同種類的三角形？直角。
22 [00:03:11.68]	小朋友	銳角。

- 23 [00:03:12.50] 老師 銳角、鈍角，有一些很難判別，像這個到底是不是直角，你是不是應該用一點工具。所以請問你，如果你今天要用工具，你要什麼工具來量？
- 24 [00:03:21.52] 小朋友 量角器。
- 25 [00:03:22.14] 老師 喔，好喔。
- 26 [00:03:22.88] 小朋友 格子。
- 27 [00:03:23.57] 老師 格子，什麼格子？
- 28 [00:03:24.99] 小朋友 格子板。
- 29 [00:03:26.14] 老師 你們有格子板，所以你也可以拼在格子板上對不對，大家可以看到格子板，因為格子板有...的跟直的線對不對，還可以怎樣？
- 30 [00:03:35.32] 小朋友 拿另外一塊。
- 31 [00:03:36.38] 老師 拿另外一塊，超讚的。每一個正方形角度都是幾度？90度。當我們在看的時候，就發現當你的這些正方形拼板有大小不同的時候，它就會出現哪一些三角形？銳角、直角跟什麼？
- 32 [00:03:52.63] 小朋友 鈍角。
- 33 [00:03:52.75] 老師 鈍角對不對。現在大家仔細觀察看看，老師像這樣操作正方形拼板的時候，圖形有什麼樣的變化呢？這會跟你等一下的閃卡遊戲有關係喔。
- 34 [00:04:09.92] 老師 我們要測試你對這些圖形的一個敏感度，你對這些圖形的直覺。首先黑板上會秀出三個數字，代表正方形的面積，接著請你找出這些正方形，並且把這些正方形的訊息，填到你的學習單裡面。然後請你猜測一下這些正方形所圍出來的三角形的種類，最後我們再想辦法來檢驗它到底是哪一種三角形。挑戰1，來，5秒鐘找到這三塊拼板，請開始動作。好，因為我們等一下預測，用你的第六感去預測它，不是把它拼出來。好，來，現在請你把訊息填進去你的學習單裡面，來，123掀牌。現在圍圍看，自己檢核一下，圍圍看。請問你出來是哪一種三角形？
- 35 [00:05:18.03] 小朋友 銳角。
- 36 [00:05:18.51] 老師 對，銳角三角形。挑戰2，開始。100、144、400，好，你拼出來的是什麼三角形？
- 37 [00:05:27.98] 小朋友 鈍角。
- 38 [00:05:29.10] 老師 鈍角三角形。挑戰3，開始。64、225、289，好，來，拼拼看，你用什麼方法檢核。
- 39 [00:05:40.66] 小朋友 我用格子板上面的格子。
- 40 [00:05:42.97] 老師 我們繼續進行挑戰4，來，預備，開始。144、225、225。掀牌。出來是哪一種三角形？
- 41 [00:05:54.02] 小朋友 銳角。

42	[00:05:55.49]	老師	對，銳角三角形，來，我想要問一下，你到現在為止，四題都對的舉手。這厲害囉，我們問一下瑞育，你可以告訴我，你是怎麼，有沒有什麼絕招，可以這麼快四題都猜對。
43	[00:06:17.56]	小朋友	就大於、小於、等於而已。
44	[00:06:19.34]	老師	大於、小於、等於。你願不願意再透露多一點。
45	[00:06:25.28]	小朋友	不要。
46	[00:06:25.94]	老師	他說他不要，他要保持他的秘密。挑戰7，25、100、400。
47	[00:06:35.39]	老師	掀牌。這什麼都有，什麼都有喔，鈍角，你們都猜鈍角，你們呢？你們也猜鈍角。有些同學覺得它圍不出來對不對，好，來，圍圍看。
48	[00:06:55.64]	老師	結果呢？
49	[00:06:58.23]	小朋友	圍不出來。
50	[00:06:58.59]	老師	它真的架不出來對不對，這個的確是排不出三角形，給你一分鐘的時間組內進化，開始。
51	[00:07:07.89]	小朋友	小的加起來大於大的，就是銳。
52	[00:07:11.53]	小朋友	銳嗎？
53	[00:07:12.61]	小朋友	小的加起來小於大的，就是鈍。小的加起來等於大的，就是直角。如果小的邊長加起來，比大的邊長加起來還要小，就是不成三角形。
54	[00:07:29.58]	小朋友	這兩個加起來37，這個小於它。
55	[00:07:34.37]	小朋友	我會了。
56	[00:07:36.67]	老師	最後一題，開始。36、144、400，請找出你的正方形拼板。掀牌。是什麼樣的三角形？果然是排不出三角形，厲害了。現在你有這12組閃卡的一個結果，觀察上面的表，填寫一下你學習單下面的問題。
57	[00:08:04.35]	小朋友	較小兩個面積和，小於最大面積。
58	[00:08:09.95]	小朋友	等於鈍角。
59	[00:08:13.07]	小朋友	就是說它們兩個相加的邊長不能小於大的邊長。
60	[00:08:19.70]	小朋友	對，那就不成立。
61	[00:08:21.86]	小朋友	可是如果你的那個...就是你還要有個條件，比如說你鈍角，你還要有那個條件，不然的話就不會是三角形，就不能排成三角形。
62	[00:08:39.47]	小朋友	好難。
63	[00:08:39.99]	小朋友	就是說如果它們兩個相加的話，面積是小於...，你看這個不成，它是不是也是小於，它們兩個相加的面積是不是也是小於這個，但它就不是鈍角。
64	[00:08:54.38]	小朋友	所以後面要寫且。
65	[00:08:56.13]	小朋友	對，且兩個小正方形邊長相加...不小於。
66	[00:09:05.99]	小朋友	不能小於。
67	[00:09:07.66]	小朋友	大正方形邊長。

68	[00:09:14.10]	小朋友	我們這一組的結論是，如果 $a^2+b^2$ 如果大於 $c^2$ 的話，它就是銳角，但前提是它要 $a+b$ 會大於 $c$ 。 $a^2+b^2$ 如果小於 $c^2$ 的話，它就是鈍角。 $a^2+b^2$ 如果等於 $c^2$ ，它是直角。如果這三個， $a+b$ 如果小於 $c$ 的話，它就不會變成一個三角形。
69	[00:09:38.87]	老師	這裡你再想想看，你們在這個情況下，好像少了誰，第五組，少了誰？你想想看。
70	[00:09:47.56]	小朋友	銳角三角形，兩個較小的三角形面積相加，然後大於...最大正方形的面積，就是銳角三角形，然後鈍角三角形就是兩個較小的三角形面積相加，要小於最大正方形的面積。然後且兩個較小的正方形邊長相加，不能小於等於最大正方形邊長，不然不能成一個三角形。然後直角三角形的話，就是兩個較小的三角形面積相加，要等於最大的正方形的面積。
71	[00:10:23.81]	小朋友	我們這一組 $a$ 跟 $b$ 是表示較短的邊長，然後 $c$ 就是較長的邊長。如果 $a^2+b^2$ 會小於 $c^2$ 的話，它就是鈍角。然後 $a^2+b^2$ 大於 $c^2$ ，它就是銳角， $a^2+b^2$ 等於 $c^2$ ，它就是直角。但是 $a+b$ 一定要大於 $c$ ，以上才可以成立。
72	[00:10:47.14]	老師	剛剛我們發現，我這樣很明顯，這兩個加起來是不是比它大？這時候圍出來這個，是不是就是一個銳角三角形，對吧，你感覺一下，用你的拼板，你也可以自己去動這件事情。剛剛在老師從這個小到大的過程裡面，是不是還會有一個剛剛好面積一樣大的時候，我們就發現它會是什麼？是不是直角，對不對？所以當兩個小正方形面積和等於大正方形面積的時候，就會圍出直角三角形。也就是說，當 $a^2+b^2=c^2$ 的時候， $a$ 、 $b$ 、 $c$ 三邊會構成直角三角形。那我們就在想，如果反過來呢？你是先有一個直角三角形，從它的三邊長，做出正方形，這兩個小的正方形的面積和，是不是一定會等於這個大正方形的面積呢？盒子裡面你有一袋三角形，先放一個在你的這個大白板上，接著從那些拼板裡面，找出以它的邊來做的三個正方形拼板。接著把正方形拼板翻面，把它分在這兩區。好，接著請你把你所有的直角三角形都拿出來，分成左右兩半，我現在要做的證明，是要證明什麼？就是這兩個小正方形的面積加起來應該要等於誰？是不是大正方形的面積。
73	[00:12:32.86]	小朋友	這兩個面積都相等。
74	[00:12:36.48]	小朋友	我知道了。
75	[00:12:39.35]	小朋友	哇，好棒。
76	[00:12:41.39]	小朋友	這裡是 $a$ ，這裡是 $b$ ，然後它是一個正方形，所以它這裡是 $b$ ，這裡是 $a$ ，然後這裡...這裡這個是 $b$ ，然後它們這個底跟它的邊長是等長，所以它也是 $b$ 。然後它這個三角形的邊 $a$ ，正方形的這裡也跟它對齊等長，所以是 $a$ 。然後這裡，這裡也是，這裡的這裡跟這裡等長，所以這裡是 $a$ ，這也等長，所以是 $b$ ，這裡就是它們都一樣長。
77	[00:13:24.07]	小朋友	這邊各有4個，4個面積可以抵掉。
78	[00:13:40.75]	小朋友	所以把這一塊三角形拿掉，跟一塊三角形一樣意思。

- 79 [00:13:45.60] 小朋友 你是說這個扣掉的話。
- 80 [00:13:47.82] 小朋友 這個還是一樣，這個扣掉還是一樣。
- 81 [00:13:50.95] 小朋友 這有個小的。
- 82 [00:13:52.11] 小朋友 沒有，他的意思是說...。
- 83 [00:13:54.10] 小朋友 我把黃色拿走一塊，比如說4拿走一塊1，拿走一塊1，然後再拿走第二塊。
- 84 [00:14:02.23] 小朋友 就拿走四塊還是一樣的面積。
- 85 [00:14:03.29] 小朋友 拿走四塊是這個一樣相等。
- 86 [00:14:07.81] 小朋友 這兩個，這個跟那個。
- 87 [00:14:09.94] 小朋友 相等，面積一樣。
- 88 [00:14:13.20] 小朋友 就是這兩個的面積已經是一樣的了，所以我們看，現在是甲+乙再加4個直角三角形，等於丙加4個直角三角形。所以四個直角三角形就可以抵消掉，這樣就會變成甲加乙等於丙。
- 89 [00:14:29.00] 小朋友 在直角三角形中，它的ab是兩個股，然後c是它的斜邊。他推論出的是 $a^2+b^2=c^2$ 。
- 90 [00:14:42.72] 老師 這是前面的命題對不對？
- 91 [00:14:44.70] 小朋友 那個圖就畫成一個是 $a^2$ ，然後這邊是 $b^2$ ，因為三角形是 $a$ 乘 $b$ 除以2，然後就四個三角形，所以就變 $2ab$ ， $c^2$ 也是四個三角形，所以也是 $2ab$ ，然後就推論出 $a^2+b^2=c^2$
- 92 [00:15:08.96] 老師 好，來，給大家自己掌聲鼓勵。大家今天也完成了非常重要的任務。



# 素養評量

「畢氏定理與拼板遊戲」素養測驗卷

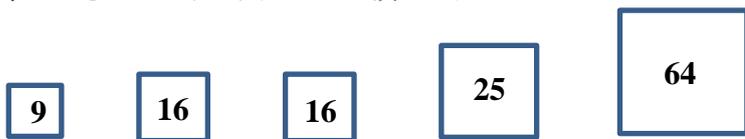
雙向細目表

評量 子概念或技能	奠基或現實情境的形成性評量	數學情境的形成性評量
構成三角形的條件 & 三角形的分類	1(1) 、1(2) 、1(3)	
畢氏定理	2	4、5(1)、5(2)
畢氏定理逆定理	3	
畢氏定理生活應用	6	
直角坐標系兩點距離		7
系統思考	1(1) 、1(2)	



班級：\_\_\_\_\_ 座號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

1. 現在有五塊正方形拼板，面積如下：

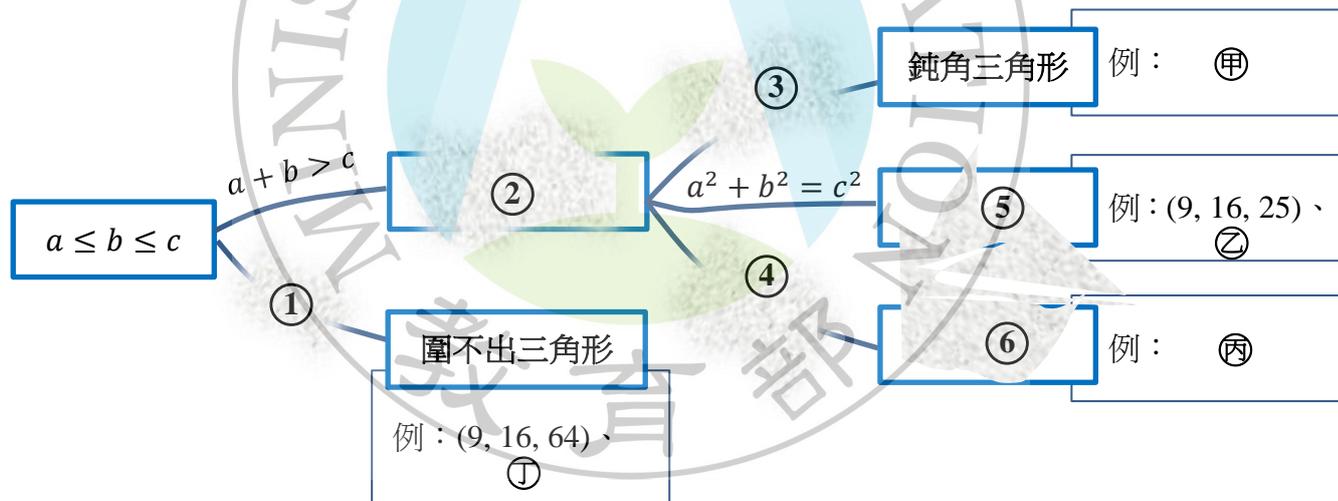


(1) 在拼板遊戲中，我們發現：「不是任意的三塊正方形拼板都能圍得出三角形」。請你想想看，如果利用上面五塊拼板來拼(頂點對頂點)，哪些組合圍得出三角形？哪些組合圍不出呢？請列出來。

**圍得出三角形的組合**：(9, 16, 16), (9, 16, 25), (16, 16, 25), (16, 25, 64)

**圍不出三角形的組合**：(9, 16, 64); (9, 25, 64); (16, 16, 64)

(2) 數學老師請大家依照圍出的三角形情況，將發現的結果畫成關係圖，如下所示，其中  $a$ 、 $b$ 、 $c$  代表正方形拼板的邊長。但交給老師之前，小商不小心將飲料翻倒在圖上了，圖上有 3 個格子的內容，以及 3 條線上的關係都不見了，請你幫他將糊掉的 6 個地方填寫回來(①~⑥)。

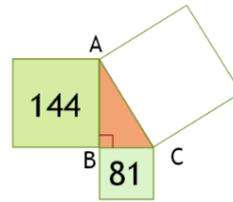
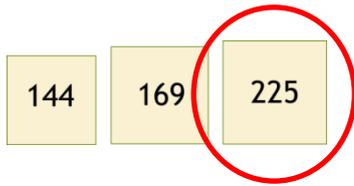


① $a+b \leq c$	② 圍得出三角形	③ $a^2 + b^2 > c^2$
④ $a^2 + b^2 < c^2$	⑤ 直角三角形	⑥ 銳角三角形

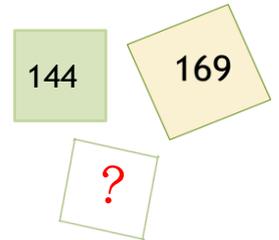
(3) 我們在拼板遊戲中也發現「能圍出的三角形種類與正方形面積的大小有關」。請你幫忙用(1)中這五塊拼板圍三角形的所有情況，對應關係圖中的條件填入Ⓐ~Ⓓ的空格，完成這張關係圖。

Ⓐ (16, 25, 64)	Ⓑ (9, 16, 25)	Ⓒ (9, 16, 16) (16, 16, 25)	Ⓓ (9, 16, 64); (9, 25, 64); (16, 16, 64)
----------------	---------------	-------------------------------	--

2. 選選看，若 $\triangle ABC$ 是直角三角形，且 $\angle B=90^\circ$ ，則下列何者是以 $\overline{AC}$ 為邊的正方形面積？請把它圈起來。



3. 老師出題讓全班挑戰，先拿出面積是 144 跟面積是 169 的正方形各一片後，接著從卡堆中抽到直角三角形的牌卡，問全班：「任務是圍出直角三角形，請問第三塊正方形拼板要拿底下這三片中的哪一片呢？」



小畢說：「老師，很奇怪耶，答案好像不只一個…」

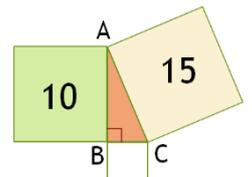
你同意小畢的說法嗎？說說看你的理由。



(1) 若面積 169 的正方形邊長為斜邊，則選面積為 25 的正方形

(2) 若面積 169 的正方形邊長為一股，則選面積為 313 的正方形

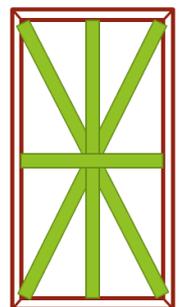
4. 若 $\triangle ABC$ 是直角三角形，且 $\angle B=90^\circ$ ，以 $\overline{AB}$ 為邊的正方形面積是 10，以 $\overline{AC}$ 為邊的正方形面積是 15，則 $\overline{BC}$ 邊長=  $\sqrt{5}$



5. 小試身手

<p>(1) 想想看，若<math>\triangle ABC</math>是直角三角形，則<math>\overline{AB}</math>為邊的正方形面積= <u>169</u></p>	<p>(2) 想想看，若<math>\triangle ABC</math>是直角三角形，則<math>\overline{DF}</math>= <u>4</u></p>
--	--

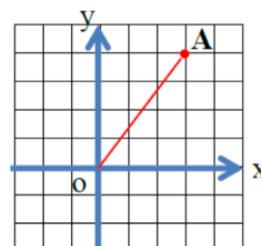
6. 小高看到一則網路分享，在日本，颱風天時會把窗戶的玻璃貼上膠帶（如圖中有色的部分），他也想這樣做。數一數家裡總共有 4 面大小為長 200 公分、寬 150 公分的落地窗玻璃需要貼，到書局選購時發現膠帶一卷長 12 公尺，請問他至少要買幾捲膠帶才夠用呢？



$$(250 \times 2 + 200 + 150) \times 4 = 3400 \text{ (公分)} = 34 \text{ 公尺}$$

答：3 捲

7. 直角坐標上有一點  $A(3, 4)$ ，請問  $A$  到原點  $O$  的距離  $\overline{OA} =$  5



「畢氏定理與拼板遊戲」素養測驗卷

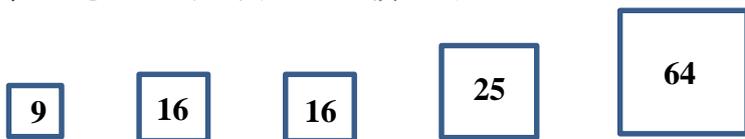
雙向細目表

評量 子概念或技能	奠基或現實情境的形成性評量	數學情境的形成性評量
構成三角形的條件 & 三角形的分類	1(1) 、1(2) 、1(3)	
畢氏定理	2	4、5(1)、5(2)
畢氏定理逆定理	3	
畢氏定理生活應用	6	
直角坐標系兩點距離		7
系統思考	1(1) 、1(2)	



班級：\_\_\_\_\_ 座號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

1. 現在有五塊正方形拼板，面積如下：

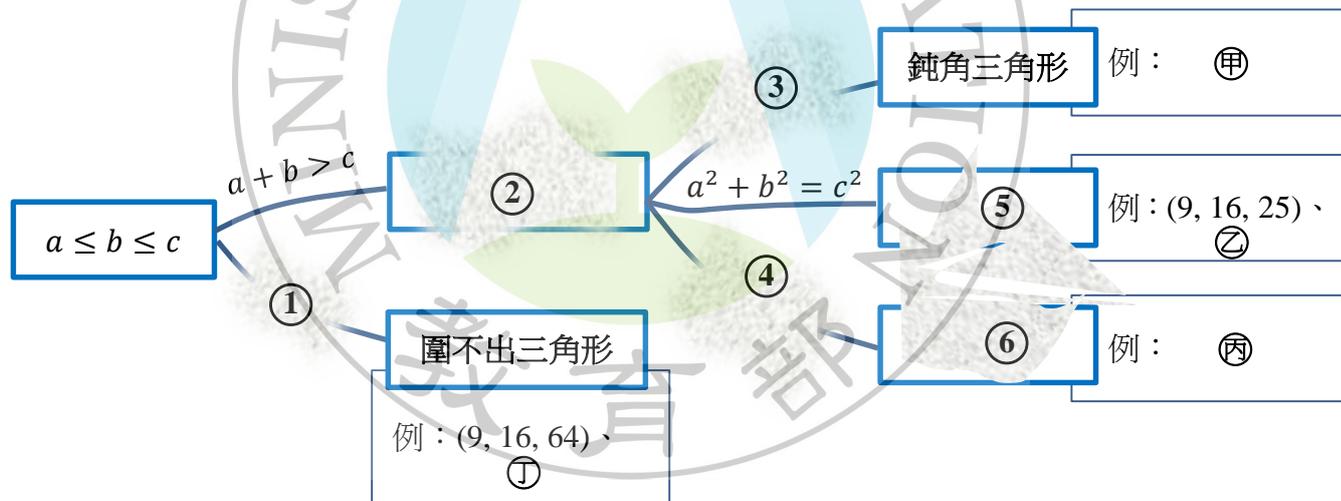


(1) 在拼板遊戲中，我們發現：「不是任意的三塊正方形拼板都能圍得出三角形」。請你想想看，如果利用上面五塊拼板來拼(頂點對頂點)，哪些組合圍得出三角形？哪些組合圍不出呢？請列出來。

**圍得出三角形的組合**：(9, 16, 16), (9, 16, 25), (16, 16, 25), (16, 25, 64)

**圍不出三角形的組合**：(9, 16, 64); (9, 25, 64); (16, 16, 64)

(2) 數學老師請大家依照圍出的三角形情況，將發現的結果畫成關係圖，如下所示，其中  $a$ 、 $b$ 、 $c$  代表正方形拼板的邊長。但交給老師之前，小商不小心將飲料翻倒在圖上了，圖上有 3 個格子的內容，以及 3 條線上的關係都不見了，請你幫他將糊掉的 6 個地方填寫回來(①~⑥)。

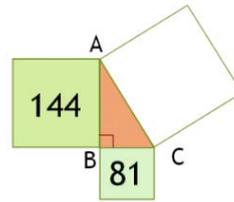
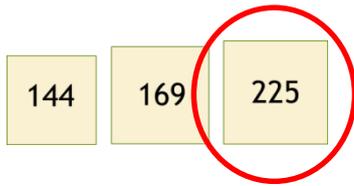


① $a+b \leq c$	② 圍得出三角形	③ $a^2 + b^2 > c^2$
④ $a^2 + b^2 < c^2$	⑤ 直角三角形	⑥ 銳角三角形

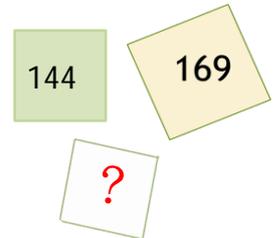
(3) 我們在拼板遊戲中也發現「能圍出的三角形種類與正方形面積的大小有關」。請你幫忙用(1)中這五塊拼板圍三角形的所有情況，對應關係圖中的條件填入 ①~⑥ 的空格，完成這張關係圖。

① (16, 25, 64)	② (9, 16, 25)	③ (9, 16, 16) (16, 16, 25)	④ (9, 16, 64); (9, 25, 64); (16, 16, 64)
----------------	---------------	-------------------------------	--

2. 選選看，若 $\triangle ABC$ 是直角三角形，且 $\angle B=90^\circ$ ，則下列何者是以 $\overline{AC}$ 為邊的正方形面積？請把它圈起來。



3. 老師出題讓全班挑戰，先拿出面積是 144 跟面積是 169 的正方形各一片後，接著從卡堆中抽到直角三角形的牌卡，問全班：「任務是圍出直角三角形，請問第三塊正方形拼板要拿底下這三片中的哪一片呢？」



小畢說：「老師，很奇怪耶，答案好像不只一個…」

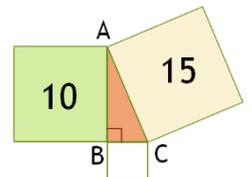
你同意 小畢 的說法嗎？說說看你的理由。



(1) 若面積 169 的正方形邊長為斜邊，則選面積為 25 的正方形

(2) 若面積 169 的正方形邊長為一股，則選面積為 313 的正方形

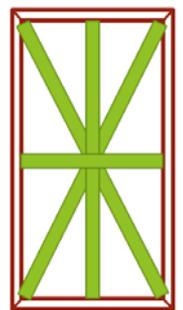
4. 若 $\triangle ABC$ 是直角三角形，且 $\angle B=90^\circ$ ，以 $\overline{AB}$ 為邊的正方形面積是 10，以 $\overline{AC}$ 為邊的正方形面積是 15，則 $\overline{BC}$ 邊長=  $\sqrt{5}$



5. 小試身手

<p>(1) 想想看，若<math>\triangle ABC</math>是直角三角形，則<math>\overline{AB}</math>為邊的正方形面積= <u>169</u></p>	<p>(2) 想想看，若<math>\triangle ABC</math>是直角三角形，則<math>\overline{DF}</math>= <u>4</u></p>
--	--

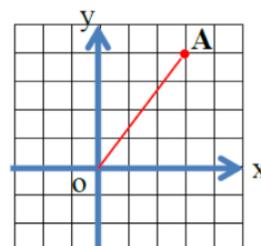
6. 小高看到一則網路分享，在日本，颱風天時會把窗戶的玻璃貼上膠帶(如圖中有色的部分)，他也想這樣做。數一數家裡總共有 4 面大小為長 200 公分、寬 150 公分的落地窗玻璃需要貼，到書局選購時發現膠帶一卷長 12 公尺，請問他至少要買幾捲膠帶才夠用呢？



$$(250 \times 2 + 200 + 150) \times 4 = 3400(\text{公分}) = 34 \text{ 公尺}$$

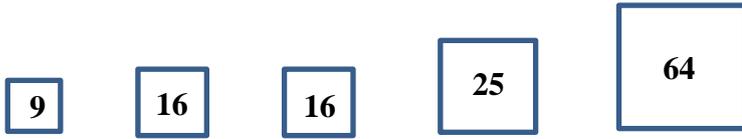
答：3 捲

7. 直角坐標上有一點  $A(3, 4)$ ，請問  $A$  到原點  $O$  的距離  $\overline{OA} =$  5



班級：\_\_\_\_\_ 座號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

1. 現在有五塊正方形拼板，面積如下：

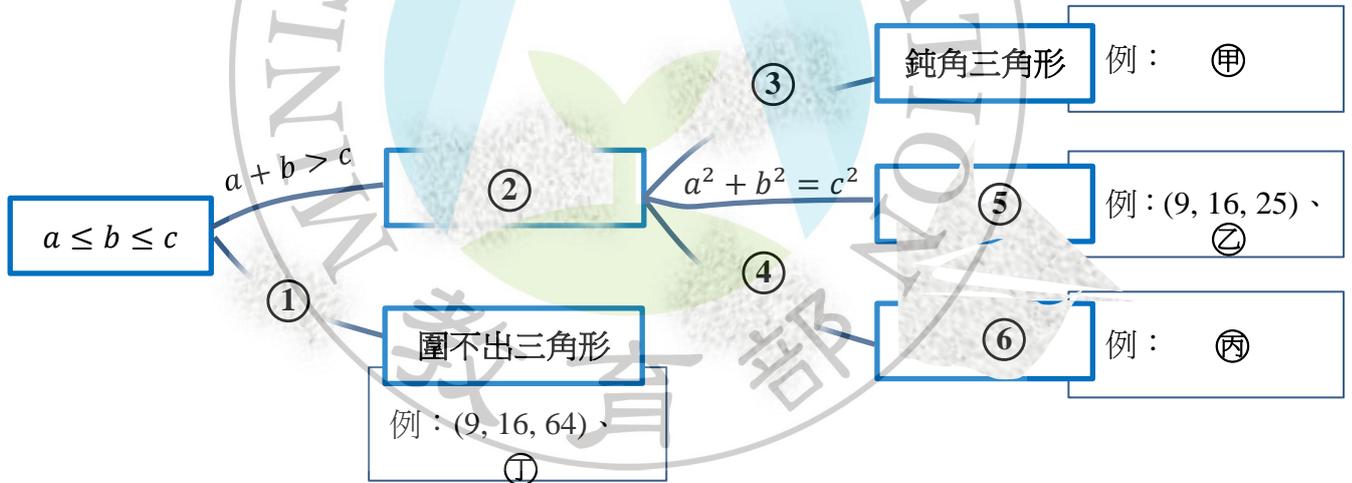


(1) 在拼板遊戲中，我們發現：「不是任意的三塊正方形拼板都能圍得出三角形」。請你想想看，如果利用上面五塊拼板來拼(頂點對頂點)，哪些組合圍得出三角形？哪些組合圍不出呢？請列出來。

**圍得出三角形的組合：**

**圍不出三角形的組合：**

(2) 數學老師請大家依照圍出的三角形情況，將發現的結果畫成關係圖，如下所示，其中  $a$ 、 $b$ 、 $c$  代表正方形拼板的邊長。但交給老師之前，小商不小心將飲料翻倒在圖上了，圖上有 3 個格子的內容，以及 3 條線上的關係都不見了，請你幫他將糊掉的 6 個地方填寫回來(①~⑥)。

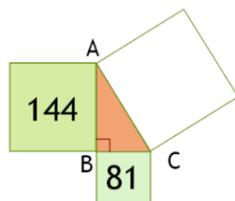


①	②	③
④	⑤	⑥

(3) 我們在拼板遊戲中也發現「能圍出的三角形種類與正方形面積的大小有關」。請你幫忙用(1)中這五塊拼板圍三角形的所有情況，對應關係圖中的條件填入甲~丁的空格，完成這張關係圖。

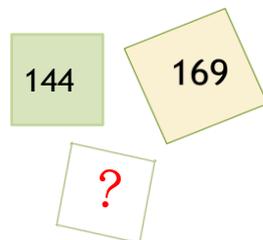
甲	乙	丙	丁
---	---	---	---

2. 選選看，若 $\triangle ABC$ 是直角三角形，且 $\angle B=90^\circ$ ，則下列何者是以 $\overline{AC}$ 為邊的正方形面積？請把它圈起來。

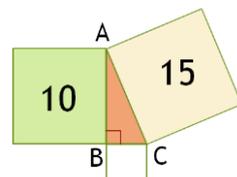


3. 老師出題讓全班挑戰，先拿出面積是 144 跟面積是 169 的正方形各一片後，接著從卡堆中抽到直角三角形的牌卡，問全班：「任務是圍出直角三角形，請問第三塊正方形拼板要拿底下這三片中的哪一片呢？」

小畢說：「老師，很奇怪耶，答案好像不只一個…」  
你同意小畢的說法嗎？說說看你的理由。



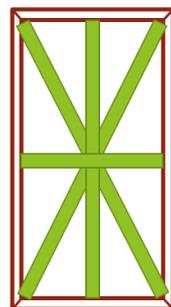
4. 若 $\triangle ABC$ 是直角三角形，且 $\angle B=90^\circ$ ，以 $\overline{AB}$ 為邊的正方形面積是 10，以 $\overline{AC}$ 為邊的正方形面積是 15，則 $\overline{BC}$ 邊長=\_\_\_\_\_



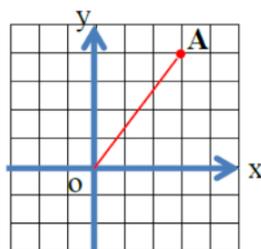
5. 小試身手

<p>(1) 想想看，若<math>\triangle ABC</math>是直角三角形，則<math>\overline{AB}</math>為邊的正方形面積=_____</p>	<p>(2) 想想看，若<math>\triangle ABC</math>是直角三角形，則<math>\overline{DF}</math>=_____</p>
--	--

6. 小高看到一則網路分享，在日本，颱風天時會把窗戶的玻璃貼上膠帶（如圖中有色的部分），他也想這樣做。數一數家裡總共有 4 面大小為長 200 公分、寬 150 公分的落地窗玻璃需要貼，到書局選購時發現膠帶一卷長 12 公尺，請問他至少要買幾捲膠帶才夠用呢？

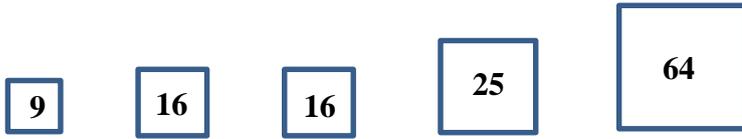


7. 直角坐標上有一點  $A(3, 4)$ ，  
請問  $A$  到原點  $O$  的距離  $\overline{OA}$  = \_\_\_\_\_



班級：\_\_\_\_\_ 座號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

1. 現在有五塊正方形拼板，面積如下：

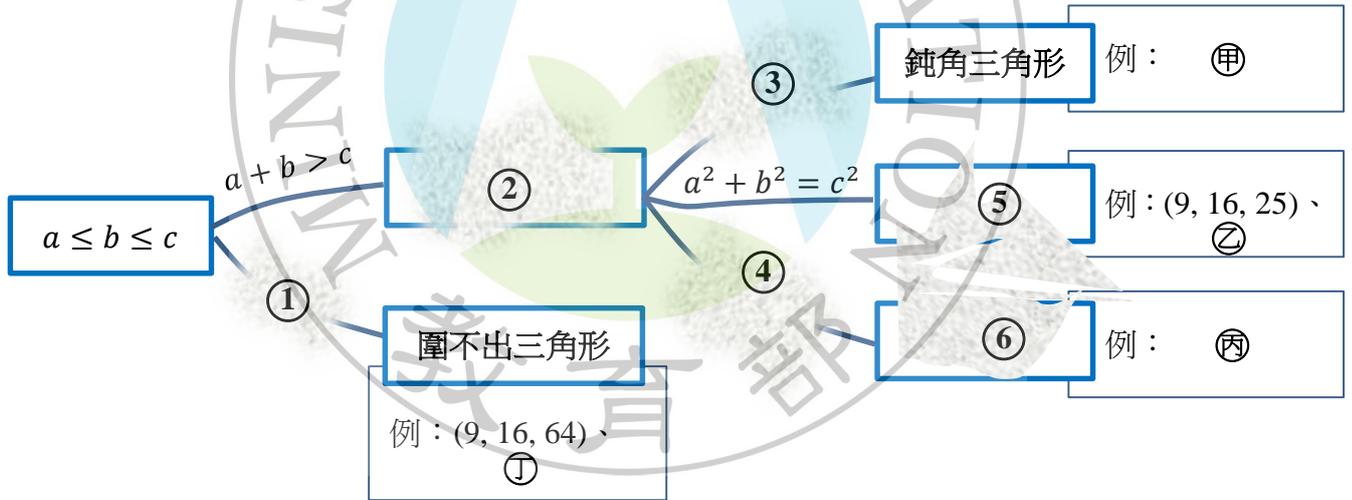


(1) 在拼板遊戲中，我們發現：「不是任意的三塊正方形拼板都能圍得出三角形」。請你想想看，如果利用上面五塊拼板來拼(頂點對頂點)，哪些組合圍得出三角形？哪些組合圍不出呢？請列出來。

**圍得出三角形的組合：**

**圍不出三角形的組合：**

(2) 數學老師請大家依照圍出的三角形情況，將發現的結果畫成關係圖，如下所示，其中  $a$ 、 $b$ 、 $c$  代表正方形拼板的邊長。但交給老師之前，小商 不小心將飲料翻倒在圖上了，圖上有 3 個格子的內容，以及 3 條線上的關係都不見了，請你幫他將糊掉的 6 個地方填寫回來(①~⑥)。

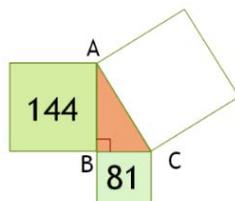


①	②	③
④	⑤	⑥

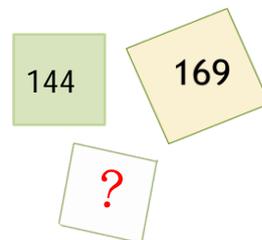
(3) 我們在拼板遊戲中也發現「能圍出的三角形種類與正方形面積的大小有關」。請你幫忙用(1)中這五塊拼板圍三角形的所有情況，對應關係圖中的條件填入 ①~④ 的空格，完成這張關係圖。

甲	乙	丙	丁
---	---	---	---

2. 選選看，若 $\triangle ABC$ 是直角三角形，且 $\angle B=90^\circ$ ，則下列何者是以 $\overline{AC}$ 為邊的正方形面積？請把它圈起來。



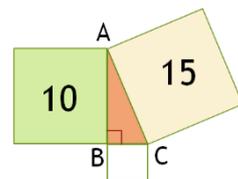
3. 老師出題讓全班挑戰，先拿出面積是 144 跟面積是 169 的正方形各一片後，接著從卡堆中抽到直角三角形的牌卡，問全班：「任務是圍出直角三角形，請問第三塊正方形拼板要拿底下這三片中的哪一片呢？」



小畢說：「老師，很奇怪耶，答案好像不只一個…」  
你同意 小畢 的說法嗎？說說看你的理由。



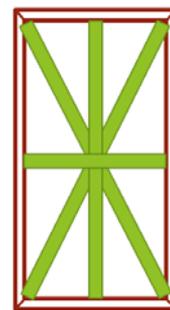
4. 若 $\triangle ABC$ 是直角三角形，且 $\angle B=90^\circ$ ，以 $\overline{AB}$ 為邊的正方形面積是 10，以 $\overline{AC}$ 為邊的正方形面積是 15，則 $\overline{BC}$ 邊長=\_\_\_\_\_



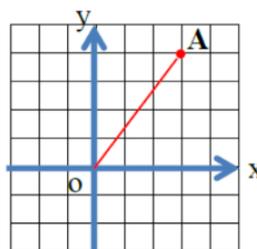
5. 小試身手

<p>(1) 想想看，若<math>\triangle ABC</math>是直角三角形，則<math>\overline{AB}</math>為邊的正方形面積=_____</p>	<p>(2) 想想看，若<math>\triangle ABC</math>是直角三角形，則<math>\overline{DF}</math>=_____</p>
--	--

6. 小高看到一則網路分享，在日本，颱風天時會把窗戶的玻璃貼上膠帶(如圖中有色的部分)，他也想這樣做。數一數家裡總共有 4 面大小為長 200 公分、寬 150 公分的落地窗玻璃需要貼，到書局選購時發現膠帶一卷長 12 公尺，請問他至少要買幾捲膠帶才夠用呢？



7. 直角坐標上有一點  $A(3, 4)$ ，請問  $A$  到原點  $O$  的距離  $\overline{OA}$  = \_\_\_\_\_



## 國 中 小 數 學 公 開 觀 課 記 錄 表

單元名稱	班級	日期與時間	教學者	觀察者
觀察 主 軸	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">學習者</div> 甲：有趣、有感 乙：有自己的想法、有機會表達(生生共建)		二十一世紀八大思考素養： 批判性思考、研究與探究、自主堅持、資訊使用、系統性思維、溝通、 反思、創造力。	
	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">教學任務</div> 丙：診斷與共建(師生)			
教學任務			學習活動	

教學者活動	學生活動

## 國中小數學公開議課記錄表

請在橫軸中填入你在觀課過程中看見的 2 至 3 個八大思考素養，並搭配縱軸中甲、乙、丙三個面向，以事件具體描述的方式完成下列表格。

八大思考 素養 三個面向			
<b>甲：有趣、有感</b> (學習活動有趣，能引動學習思考；展現學生有感的學習。)			
<b>乙：有自己的想法、有機會表達</b> (學生主動參與，展現生生共建)			
<b>丙：診斷與共建</b> (教學任務適時介入診斷，提供師生共建機會。)			

## 《數學素養微課程：求面積與創造力》

模組名稱		求面積與創造力	設計師	黎懿瑩、謝佳叡		
適用年級(主題)		五上(S)	指導教授	謝佳叡		
數學主題		多邊形面積	21世紀思考素	創造力		
微型活動	影片名稱	原教案名稱	適用課本單元	使用的三元素		
一	造非典型平行四邊形	擺動的長方形	平行四邊形的面積和高	流暢性	變通性	獨創性
二	平分平行四邊形推論三角形與梯形面積	平行四邊形裡的雙胞胎	三角形的面積和高 梯形的面積和高	流暢性	變通性	獨創性
三	創形並檢驗面積	[選創]阿土伯買新土地啦！	面積公式的應用	流暢性	變通性	獨創性
四	切割與重構發現截彎取直面積一樣	阿土伯蓋公園！	面積公式的應用	流暢性	變通性	獨創性
	(收錄番外篇)	阿土伯的土地變小了！怎麼辦？ 怎麼辦？	平行四邊形的面積和高	流暢性		獨創性
	(未拍攝)	[選創]最大的梯形	梯形的面積和高	流暢性	變通性	

註：微型活動序號為影片版序號。



<https://youtu.be/uORsNtEOSjk>

## 壹、教學重點

面積量在國小的教學中，由點數有幾個 1 平方公分的方格開始。在計算長方形所佔的方格數之後，發現可以用「長邊的格數 x 寬邊的格數」來簡化計算長方形的面積。接下來，每次面對一個新的圖形面積問題，都是透過切割、重組，就是畫輔助線，活化已知的工具，讓已知的工具與未知的問題連結。例如：當需要計算平行四邊形的面積時，若已經知道長方形面積公式，就將平行四邊形切割、重組來製造長方形，讓長方形的面積公式可以轉化用來計算平行四邊形的面積；當需要計算三角形面積，此時已經知道長方形和平行四邊形的面積公式，就把三角形轉化製造出長方形或平行四邊形，來得到計算三角形面積的方法。

本教學設計所有的微活動，都緊繞這樣的想法，在不干擾教學進度並搭配一般課本教學歷程，提供與創造力相關技能的學習，所對應的學習重點如下：

學習表現 s-III-1 理解三角形、平行四邊形與梯形的面積計算。

學習內容 S-5-2 三角形與四邊形的面積：操作活動與推理。利用切割重組，建立面積公式，並能應用。

## 貳、素養微課程活動設計目標與核心概念

- 一、數學單元或主題：面積--平行四邊形的面積、三角形的面積、梯形的面積。
- 二、課程目標與核心概念：
  - (一) 在上述數學單元教學中的某些時段，穿插安排數個輕巧、簡短的素養微型活動，使得教師能在順利完成數學內容教學的同時亦兼顧培養學生數學中的創造思考力。
  - (二) 增加數學教師對學生創造思考力狀況的瞭解，並將這樣的瞭解應用在學生對教學單元的概念發展與概念保留。
- 三、21 世紀思考素養：此微課程欲發展的 21 世紀數學思考素養為創造思考力（但不侷限在創造思考上）；以三個面向來發展學生的創造力。
  - (一) 流暢性：指能從既有材料出發，產生很多可能性的思考、過程、

結果之能力。強調的是學生能流暢的思考。例如：從既有材料出發產生「多個不同」的合情、合理想法。

(二) 變通性：指能產生不同類別、方式思考、過程、結果之能力。強調的是學生思考能轉變不同層次的類別，例如：要求學生產生另一種「盡量不同」的思考方式或類型的答案。

(三) 獨創性：指能產生獨特新穎思考、過程、結果之能力。強調的是提出盡量「與眾不同」的想法，例如：要求學生發展別的同儕都想不到的做法。

### 參、微型活動

影片名稱	課本活動	微型活動
		微型活動一： <u>阿土伯</u> 的土地變小了！怎麼辦？怎麼辦？
	平行四邊形面積教學	
一：造非典型平行四邊形		微型活動二：擺動的長方形
二：平分平行四邊形，推論三角形與梯形面積		微型活動三：平行四邊形裡的雙胞胎
	三角形面積教學 梯形面積教學	
		微型活動四：[選創] 最大的梯形
三：創形並檢驗面積		微型活動五：[選創] <u>阿土伯</u> 買新土地啦！
四：切割與重構，發現截彎取直面積一樣		微型活動六： <u>阿土伯</u> 蓋公園！

在後面的報告中，所有★後的文字皆是教案設計說明，不會出現在學生的學習單或操作單中。實線框內的是暫定的學習單，仍需與實際實施教師討論後釐定。

微型活動一：阿土伯的土地變小了！怎麼辦？怎麼辦？

微型活動面向：

先備經驗	學生已知長方形面積公式。				
對應課本	平行四邊形面積教學之前				
教學目標	<p>(1) 作為引出平行四邊形面積公式的前置探索活動。</p> <p>(2) 透過情境故事讓學生產生學習動機，學生由面積保留概念得知，切割重組後的圖形，和原來的長方形面積相同，而情境中最適當的圖形是平行四邊形，進而察覺長方形的長就是平行四邊形的底，長方形的寬就是平行四邊形的高。</p>				
活動內容	<p>(1) 學生依據故事情節，將長方形切割之後，重新拼成等面積的另一種圖形。</p> <p>(2) 學生說明選擇出來的圖形，如何計算面積。</p>				
活動過程	<input checked="" type="checkbox"/> 啟思	<input checked="" type="checkbox"/> 操作	<input checked="" type="checkbox"/> 觀察	<input checked="" type="checkbox"/> 歸納或形成結論	<input type="checkbox"/> 詮釋結果
創造元素	<input checked="" type="checkbox"/> 流暢性		<input type="checkbox"/> 變通性	<input checked="" type="checkbox"/> 獨創性	

活動時間：五分鐘

活動器材：學生操作用小紙片、教具盒、黑板大型教具、海報、磁鐵

活動流程：

- 一、 個人操作、全班分類：提供圖紙如下圖，每人一份(共兩張)。(五分鐘、啟思操作與觀察、流暢性與獨創性)



二、情境引入。(啟思操作與觀察、流暢性與獨創性)

1.



阿土伯

大富翁中角色

70 歲、60 公斤

職業：自耕農

興趣：邊泡茶邊拉胡琴

口頭禪：貪財！貪財！憨人有憨福！

阿土伯的農地面臨道路開闢、土地重劃。原來長方形的農地，如今被馬路切去一角，剩下的土地變小了！

道路開闢前



道路開闢後



政府準備在阿土伯原來的農地旁邊，再劃分一塊土地補償，讓阿土伯的土地面積沒有損失，如果你是土地測量師，你會怎麼劃分土地給阿土伯呢？

2. 同學們拼出了好幾種歸還土地的方法，如果你是阿土伯，你希望政府還給你的土地是哪一種形狀？為什麼？
3. 你怎麼知道新的土地和舊的土地一樣大？阿土伯的土地面積有多大？你怎麼算出來的？

★ 學生可能拼成各種圖形：



★ 學生可能說明四四方方而且連通的土地，用機械耕作比較方便，如果另外給一塊，就不太方便；也可能說明上下分別有別人的土地，無法分配給阿土伯，所以平行四邊形或等腰梯形比較適當。其中，選平行四邊形的學生可能比選梯形的多一些。

★ 學生可能說明是拼回長方形，用「長 x 寬」算出來的，因為平行四邊形的面積就是原來長方形的面積，長方形的面積公式「長 x 寬」算出來的答案也是平行四邊形的面積。

(平行四邊形的面積不會算，但是拼回長方形面積是會算的，所以做出和平行四邊形一樣大的長方形，面積就可以算了！)

★ 接下來進入課本：長方形面積=長 x 寬，長方形的「長」就是平行四邊形的「底」，長方形的「寬」就是平行四邊形的「高」，所以平行四邊形的面積=底 x 高。

## 微型活動二：擺動的長方形

微型活動面向：

先備經驗	學生已經學會平行四邊形公式。				
對應課本	平行四邊形面積教學之後				
教學目標	應用平行四邊形面積公式，造例：等面積的平行四邊形可能的底和高的組合，進而畫出不同的平行四邊形，強化面積保留性。				
活動內容	學生畫出面積是 6 平方單位的平行四邊形，並在過程中察覺除了數格子之外，也可以利用平行四邊形的面積公式=底 x 高，推導底 x 高=6 可能的組合，進而畫出不同的平行四邊形。				
活動過程	■啟思	■操作	■觀察	■歸納或形成結論	□詮釋結果
創造元素	■流暢性		■變通性	■獨創性	

活動時間：十五分鐘

活動器材：釘板、橡皮筋、教具盒、方格白板、白板筆、長尺、磁鐵條、大型教具用長尺及三角板

活動流程：

一、4 人一組，小組在白板上共創，再貼上黑板組間競賽：

(1) 白板上有一個面積是 6 平方單位的長方形，各組在白板的方格上畫兩個「和長方形面積相同的平行四邊形」。

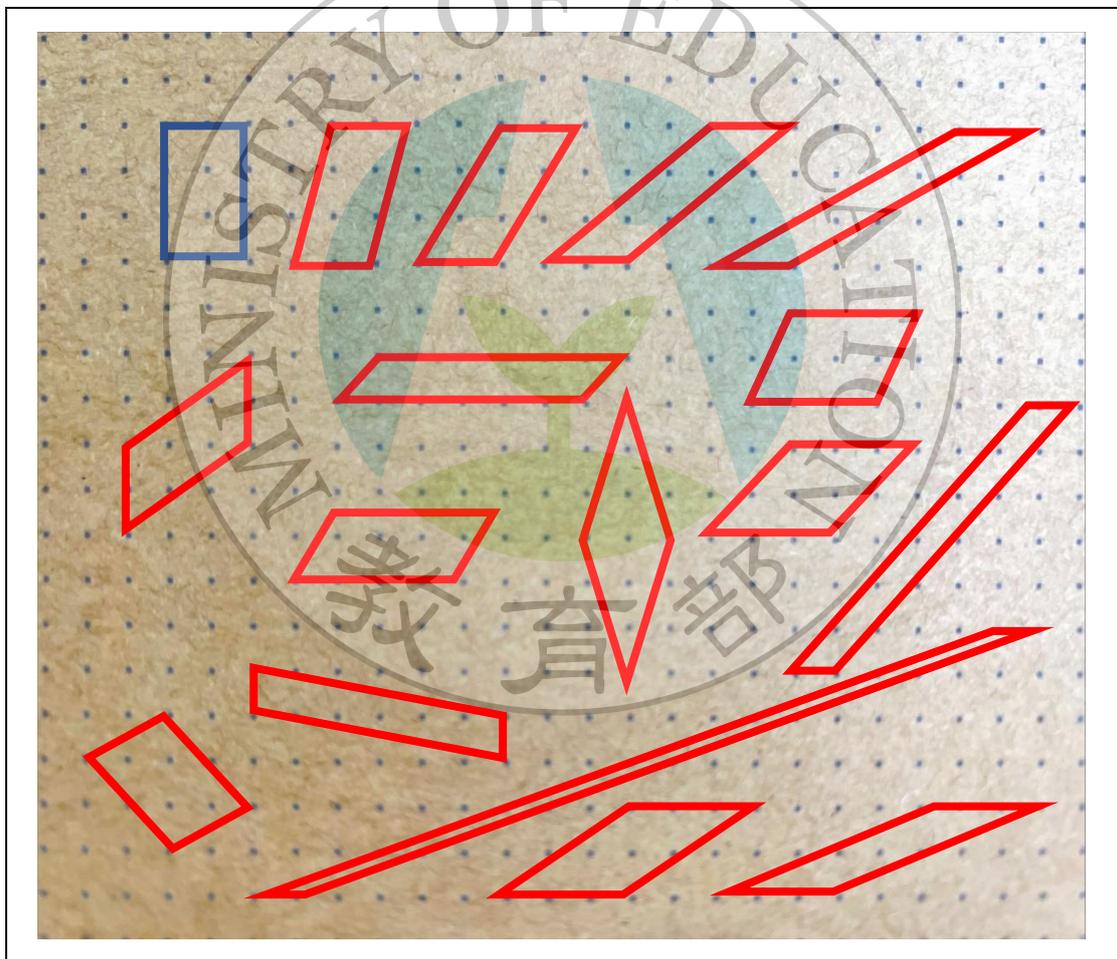
(2) 各組的白板張貼在黑板上，全班檢視，各組派員上台說明：面積為什麼「確實」是 6 平方單位。全班判斷通過者可得分。

(3) 計分標準：成功畫出的圖形(面積 6 平方單位、是平行四邊形)得 1 分，與別

組相同的圖形，分數平分；首先畫出第二種底、高不同的平行四邊形類別，得 2 分；首先畫出第三種底、高不同的平行四邊形類別，得 3 分，以此類推。

二、教師提問，全班回答：

- (1) 請同學上台把「底」是 2 單位長度的平行四邊形打勾。
- (2) 提問：固定「底」是 2 單位長度的時候，要怎麼畫出各種 6 平方單位的平行四邊形？  
(十五分鐘、啟思操作與觀察、流暢性、變通性與獨創性)



- ★ 學生可以數格子，或者透過可以驗證的切割移拼找到答案。
- ★ 學生畫出很多 2x3 的平行四邊形，而發現這些平行四邊形都可以用 2x3 來計算面積，用「2 就是平行四邊形的底、3 就是平行四邊形的高」來做詮釋，進而發現平行四邊形的底和高分別相同時，圖形的傾斜角度不同，可

以畫出面積相同，形狀不同的平行四邊形。

- ★ 學生可能發現  $6=1\times 6$ 、 $6=6\times 1$ 、 $6=2\times 3$ 、 $6=3\times 2$ ，而分別畫出底為 1、6、2、3，高為 6、1、3、2 的平行四邊形；也可能發想  $6=1.5\times 4$ ，進而畫出底為 1.5，高為 4 的平行四邊形。
- ★ 學生可能回答：當底固定是 2 單位長度的時候，高就會固定是 3 單位長度，只要把高的位置左右移動一些，就可以畫出一個跟別人不一樣的平行四邊形。
- ★ 實驗學生的答案：

先畫六格面積的長方形，切掉一個斜邊，還原到這邊來。

先畫一個原本的長方形，再切這個三角形，因為這是寬是一格、長是三格的對角線，所以我在這邊就補三格切對角線，這兩個三角形是一樣的，所以我這個平行四邊形跟原本的一樣大。

先畫一個一樣的長方形，切對角線，然後移到這裡，就變成一個平行四邊形。

先畫一個一樣的長方形，從長方形切出一個直角三角形，搬到另外一邊。

先畫  $1\times 6$  六格的長方形，從長方形切出一個直角三角形，搬到另外一邊。

這個斜的平行四邊形，這樣兩個半格合起來算一格，這樣兩個半格合起來算一格，所以全部是六格。

這是平行四邊形，因為上下都有垂直，所以這兩對邊平行。然後這塊移到這邊，這塊移到這邊，這塊移到這邊，這樣就是原來的長方形。

這是一個菱形，它是從  $1\times 6$  的長方形，上面切一半，搬到右邊，下面切一半，搬到右邊，所以面積一樣，然後我畫垂直線，因為上下都有垂直，所以對邊平行。

### 微型活動三：平行四邊形裡的雙胞胎

微型活動面向：

先備經驗	銜接微型活動二，學生已熟悉造出各種面積是 6 平方單位的平行四邊形。				
對應課本	引入三角形與梯形面積教學之前，由已知平行四邊形面積公式，銜接三角形與梯形面積教學。				
教學目標	透過「畫一條直線平分平行四邊形」，作為引入三角形與梯形面積公式的前置作業。				
活動內容	<p>(1) 利用活動一創作的各種平行四邊形，讓學生進行多樣化的平分活動，約定畫一條直線，使剪出來兩部分的形狀、大小相同。</p> <p>(2) 將平分之後得到的圖形做分類，察覺可以分為三角形類、梯形類和平行四邊形類。</p>				
活動過程	<input checked="" type="checkbox"/> 啟思	<input checked="" type="checkbox"/> 操作	<input checked="" type="checkbox"/> 觀察	<input checked="" type="checkbox"/> 歸納或形成結論	<input type="checkbox"/> 詮釋結果
創造元素	<input checked="" type="checkbox"/> 流暢性		<input checked="" type="checkbox"/> 變通性	<input checked="" type="checkbox"/> 獨創性	

活動時間：十分鐘

活動器材：延續活動二

活動流程：

- 一、 個人操作、全班分類：提供點格紙。  
(十分鐘、啟思操作觀察歸納和形成結論、流暢性與變通性)

1. 在上一個活動畫出來的平行四邊形上，嘗試「畫一條直線平分平行四邊

形」，你能平分出哪些不同的形狀呢？種類越多越好。

2. 發表並進行分類。
3. 剛才的平行四邊形是 6 平方單位，你分割之後的一個三角形面積有多大？一個梯形面積有多大？

- ★ 學生可能畫出三角形、梯形或平行四邊形。學生也可能發現通過四邊形中心（兩條對角線交點）的直線都能滿足要求。
- ★ 學生可能透過此活動發現三角形面積是平行四邊形面積的一半，梯形面積是平行四邊形面積的一半。



微型活動四：[選創] 最大的梯形

微型活動面向：

先備經驗	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 學生已經知道等周長的四邊形，形狀越接近正方形，面積越大。</li> <li>● 學生已經學會梯形面積公式。</li> </ul>				
對應課本	梯形面積教學之後				
教學目標	透過四邊形周長與面積關係，或梯形面積公式，探討如何圍出面積最大的梯形。				
活動內容	<p>提供三根扣條，作為梯形的三邊，第四邊請學生自己畫。討論怎樣可以拼出最大的梯形。</p> <p>學生可能透過操作，應用梯形面積的計算公式，察覺「以最長的扣條作為梯形的高」，所得的面積最大。並能加以論述為什麼這樣的梯形面積最大。</p>				
活動過程	■啟思	■操作	■觀察	■歸納或形成結論	■詮釋結果
創造元素	■流暢性		■變通性		<input type="checkbox"/> 獨創性

活動時間：十五分鐘

活動器材：每生三根扣條(5 公分、7 公分、10 公分)、方格白板、白板筆、尺

活動流程：

- 一、2 人一組操作並發表：每小組發下三根扣條(5 公分、7 公分、10 公分)，一張方格紙。  
(十五分鐘、啟思與操作過程、流暢性、變通性)

- 
- 
1. 請將利用三根扣條為三邊，第四邊自己畫，組成梯形，找找看，怎麼組會得到面積最大的梯形？
  2. 把過程和結果記錄在方格紙上，並利用這個紀錄的歷程說服別組的同學。

- ★ 學生操作扣條，探究更改扣條的順序或角度，來改變梯形的形狀，透過視覺感官，感受面積大小改變的趨勢，進而在方格紙上描繪圖形、計算面積。
- ★ 學生發表時，應著重在說明如何逐步找到面積更大的梯形，這個演變的「歷程」，以及「用什麼方式說理」，比較出後來找到的梯形比前一個梯形更大。也可以重視學生在聆聽別組報告時，是否觸動想法的調整。



微型活動五：[選創] 阿土伯買新土地啦！

微型活動面向：

先備經驗	學生已經學會長方形、平行四邊形、三角形、梯形面積公式。 學生已熟悉面積保留性，知道等面積的四邊形或三角形可以有不同形狀。				
教學目標	學生能運用平行四邊形、三角形、梯形面積公式，並在情境中畫出指定面積的四邊形。				
活動內容	利用平行四邊形、三角形、梯形的面積公式，在特定區域內畫出指定面積的四邊形或三角形。				
活動過程	<input checked="" type="checkbox"/> 啟思	<input checked="" type="checkbox"/> 操作	<input checked="" type="checkbox"/> 觀察	<input checked="" type="checkbox"/> 歸納或形成結論	<input type="checkbox"/> 詮釋結果
創造元素	<input checked="" type="checkbox"/> 流暢性		<input checked="" type="checkbox"/> 變通性		<input checked="" type="checkbox"/> 獨創性

活動時間：十五分鐘

器材：學習單、細字白板筆、平板、86吋平板觸控螢幕

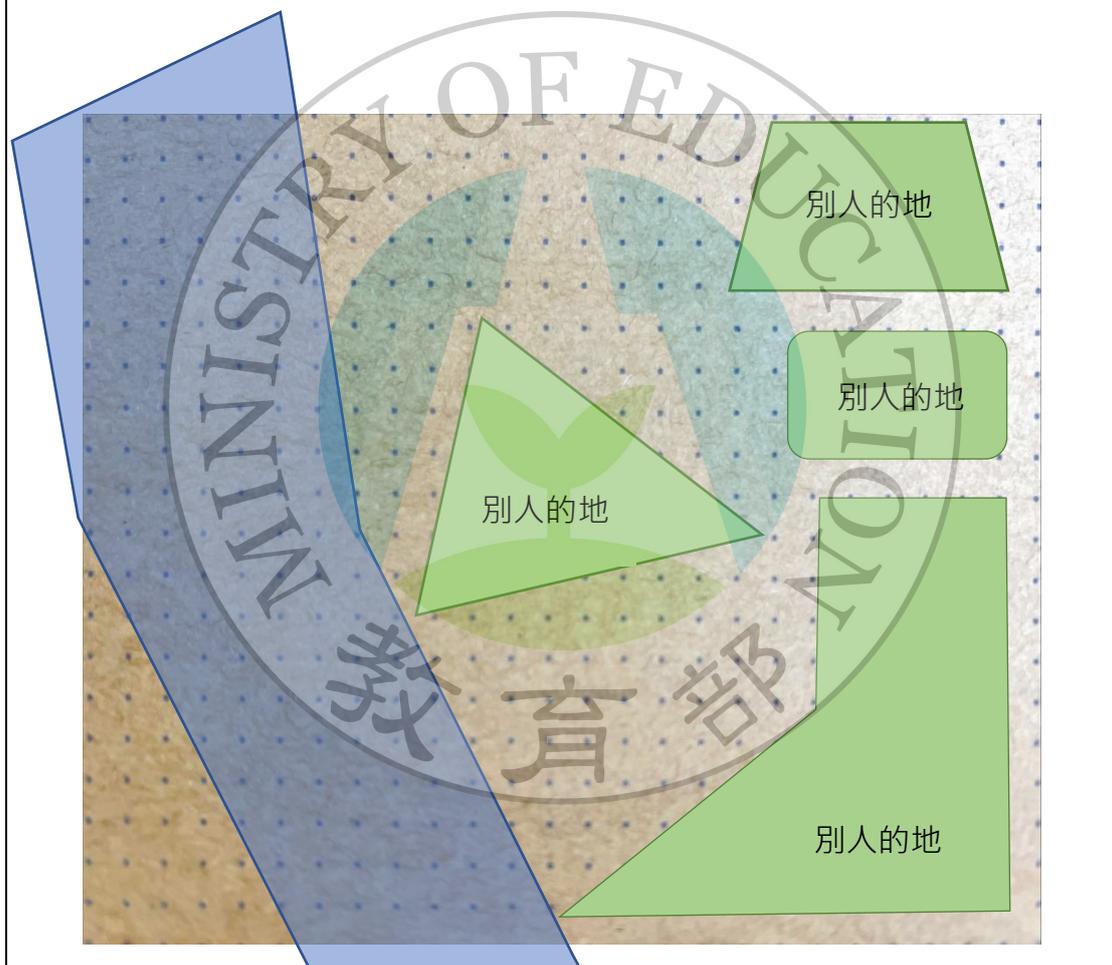
活動流程：

- 一、個人完成學習單，進行發表。
- 二、情境引入。(十分鐘、啟思操作與觀察、流暢性與獨創性)

阿土伯要在土黃色區域買一塊 12 平方單位新土地。

1. 選擇平行四邊形、三角形、梯形的話，你可以幫阿土伯找到哪些形狀的土地呢？種類越多越好！
2. 是否有機會畫出菱形、箏形或是任意四邊形的土地？

\* 準備一疊學習單，學生可以取用第二張。



- ★ 學生可能利用長方形、平行四邊形、梯形的面積公式，畫出許多種面積為 12 平方單位的長方形、平行四邊形和梯形。
- ★ 學生可能利用利用三角形面積公式，組合出許多種面積為 12 平方單位的菱形、箏形或任意四邊形。

微型活動六：阿土伯蓋公園！

微型活動面向：

先備經驗	學生已經學會長方形、平行四邊形、三角形、梯形面積公式。 學生已熟悉面積保留性，知道利用已知的面積公式解決新的面積問題。				
教學目標	透過切割、移拼、補扣，計算指定圖形的面積。				
活動內容	(1) 觀察並且運用切割、移拼、補扣，以便使用已知的面積公式求解。 (2) 以多樣性的列式，計算指定圖形的面積。				
活動過程	■啟思	■操作	■觀察	■歸納或 形成結論	□詮釋結果
創造元素	■流暢性	■變通性	■獨創性		

活動時間：十五分鐘

活動器材：學生操作用小紙片、平板、86吋平板觸控螢幕、剪刀、3M 膠帶

活動流程：

一、個人操作並發表。

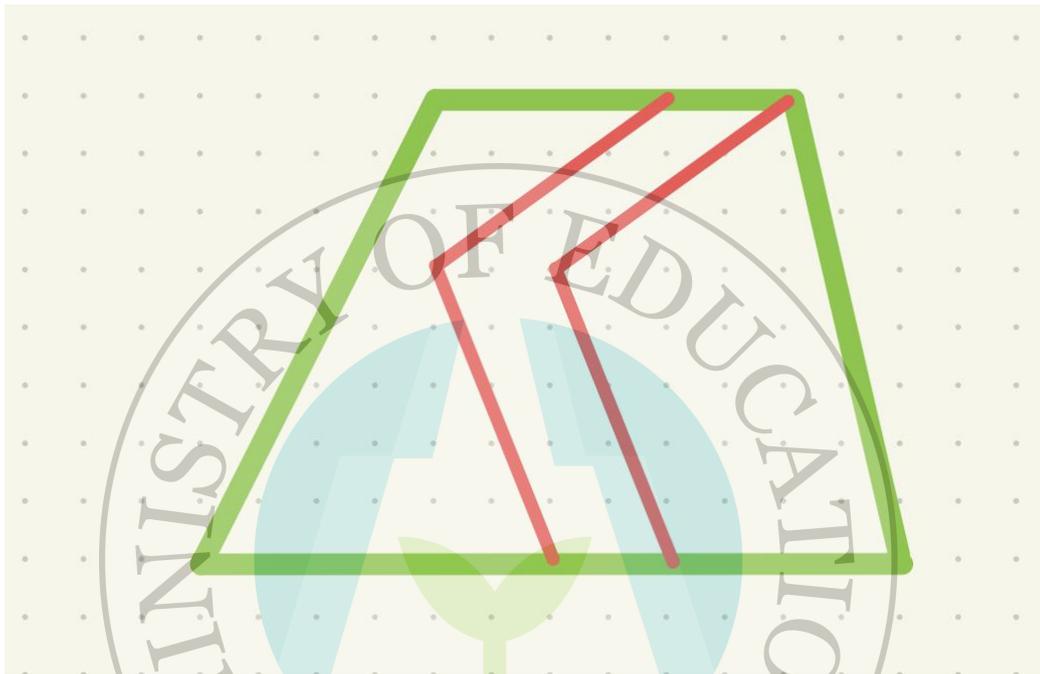
(十五分鐘、啟思操作觀察歸納或形成結論、流暢性變通性與獨創性)

1. 阿土伯捐了一塊地蓋公園，中間預留一條道路，其餘種花。

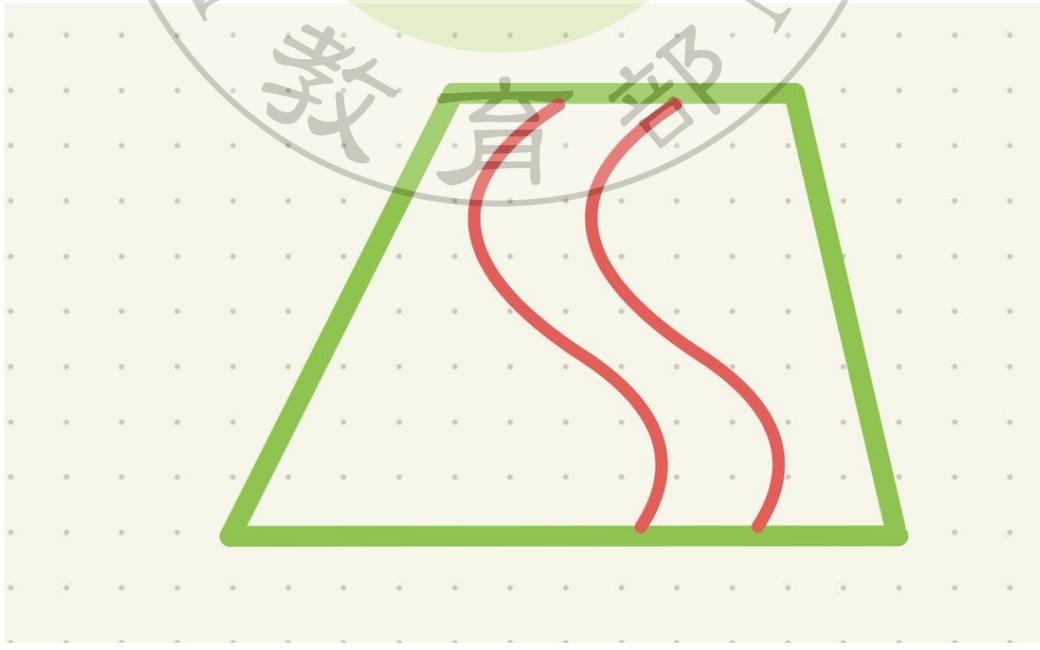
請說明「可以切割成哪些會算的形狀」來計算種花的面積，方法越多越好！

2. 畫線說明用什麼形狀來解題，無須計算，請至少提出三種方法。

(1) 第一回合



(2) 第二回合



- ★ 學生可能利用切割、移拼、補扣等方式進行。
- ★ 學生須說明透過切割、移拼、補扣，得到什麼樣的圖形，而可運用已知公式求解。



## 「求面積與創造力」影片逐字稿

編號	時間	發言者	內容
<b>微型活動一：造非典型平行四邊形</b>			
1	[00:00:15.59]	老師	待會你要做的是這樣，最後一句寫什麼？
2	[00:00:19.56]	小朋友	可以畫出多少種不一樣的圖形呢。
3	[00:00:26.17]	老師	好，意思就是要畫的是.....平行四邊形，這個平行四邊形有沒有條件？
4	[00:00:34.11]	小朋友	有。
5	[00:00:34.70]	老師	什麼條件？
6	[00:00:35.72]	小朋友	和長方形的面積相同。
7	[00:00:39.84]	老師	和長方形的面積相同。
8	[00:00:55.63]	小朋友	一二三四五，這個可以。
9	[00:01:04.71]	老師	有沒有人可以說這些圖形哪裡相同？
10	[00:01:07.81]	小朋友	它們的格數都一樣。
11	[00:01:10.30]	老師	格子數一樣，就是面積一樣，ok。
12	[00:01:13.39]	小朋友	它們都是.....一個角切掉之後，擺在另外一個地方會變成一個長方形。
13	[00:01:22.45]	老師	那請問哪裡不同？
14	[00:01:25.00]	小朋友	傾斜的角度不相同。
15	[00:01:28.09]	小朋友	它們方向不同，有就是往這邊斜，有一些是往這邊斜。
16	[00:01:34.19]	老師	喔，意思是往這邊是可以的，往這邊可以嗎？
17	[00:01:38.55]	小朋友	可以。
18	[00:01:39.40]	老師	也可以，所以.....看了這一排，你還能畫出更多嗎？
19	[00:01:46.81]	小朋友	可以。
20	[00:01:47.70]	老師	能不能用口述就好，要怎麼畫出更多？
21	[00:01:50.60]	小朋友	每一個都再傾斜一度。
22	[00:01:53.30]	老師	每個都再傾斜一度。
23	[00:01:55.65]	小朋友	一度。
24	[00:01:56.25]	老師	好，那這樣你可以畫出多少？
25	[00:02:00.68]	小朋友	360個。
26	[00:02:01.74]	老師	360個。
27	[00:02:03.14]	小朋友	就把它們現在做的變成橫的。
28	[00:02:06.54]	老師	喔，站著變躺著。
29	[00:02:08.12]	小朋友	嗯，對。
30	[00:02:09.07]	老師	意思是全部轉方向。
31	[00:02:12.30]	小朋友	對，沒錯。
32	[00:02:13.77]	老師	這樣。
33	[00:02:16.22]	小朋友	對。
34	[00:02:16.39]	老師	這個意思是嗎？
35	[00:02:18.28]	小朋友	對。
36	[00:02:19.74]	老師	好，所以這個方向跟.....這個向是相同的圖形嗎？
37	[00:02:25.51]	小朋友	是。
38	[00:02:26.46]	老師	是嘛。
39	[00:02:27.07]	小朋友	對。
40	[00:02:27.46]	老師	對不對，所以其實它旋轉，不管轉哪裡是一樣的。
41	[00:02:32.15]	小朋友	對。
42	[00:02:32.80]	老師	ok齣，好。我要貼第二輪上來了。

43	[00:02:43.90]	老師	看起來好像很不一樣欸，誰可以說說看你發現了什麼。
44	[00:02:47.92]	小朋友	它們的那個平行四邊形都是比較長一點的。
45	[00:02:53.25]	老師	比較細長。
46	[00:02:54.61]	小朋友	對。
47	[00:02:55.23]	老師	ok。
48	[00:02:55.36]	小朋友	不像中間那個比較寬一點。
49	[00:02:57.97]	老師	你怎麼知道這個對還是不對？
50	[00:02:59.77]	小朋友	把這一半的三角形移到這裡，然後再算算看是不是六格。
51	[00:03:04.21]	老師	那你算算看。
52	[00:03:07.27]	小朋友	一二.....六格。
53	[00:03:11.36]	老師	六格，好，ok。那有沒有人可以來說明這個對還是不對？
54	[00:03:19.00]	小朋友	只要把這一裡切一半的話，這一個三角形放在這裡的話，就變成一個長方形。長方形的話就變成六大格。
55	[00:03:30.29]	老師	平行四邊形有沒有不同的？就好比說底不是平的，你能不能畫出底是斜斜的，或者四都是斜斜的？但是面積仍然是六的。
<b>微型活動二：平分平行四邊形推論三角形與梯形面積</b>			
56	[00:03:57.93]	老師	待會兒呢，是你們那一組的，你就拿回去，不擦喔，平行四邊形不擦掉，要保持原來的平行四邊形，請你用橘色的筆畫一條直線，把它平分.....平分成什麼？兩個一模一樣的。
57	[00:04:24.03]	老師	好，所以這三個都是三角形了喔，對嗎？有沒有能切出不同的形？
58	[00:04:30.38]	小朋友	對，這裡。
59	[00:04:37.01]	小朋友	我把這邊畫一條直線，然後分成兩個平行四邊形。
60	[00:04:42.90]	小朋友	我先在這邊畫一個直線，把這兩個變成平行四邊形。
61	[00:04:48.31]	小朋友	我在中間畫一條線，切成梯形。
62	[00:04:53.92]	小朋友	從下面數這裡是九格，從上面數下來這也是九格，所以在這中間畫一條線，它就會變成梯形。
63	[00:05:02.27]	小朋友	中間這條把它切成兩個長方形。
64	[00:05:06.13]	小朋友	這兩個角，然後中間把它切一半，然後就可以變成兩個三角
65	[00:05:11.66]	老師	這個三角形和平行邊形的關是什麼？
66	[00:05:15.02]	小朋友	如果有兩個一樣的三角形的話，就可以拼出平行四邊形。
67	[00:05:21.50]	小朋友	如果把平行邊形切成兩塊一樣的形狀，那除以二就是它的面
68	[00:05:30.18]	老師	如果我需要一個面積是三格的三角形，會從多大的平行四邊形裡面切出來？
69	[00:05:37.08]	小朋友	六。
70	[00:05:37.53]	老師	那如果我一個面積是六格的三角形，要從多大的平行四邊形切出來？
71	[00:05:44.53]	小朋友	12格。
72	[00:05:45.74]	老師	所以我要計算三角形的面積可以怎麼做啊？
73	[00:05:49.10]	小朋友	底乘高除以二。
74	[00:05:51.02]	老師	為什麼是底乘高除以二？

75	[00:05:52.99]	小朋友	因為它是.....平行四形，然後切一半變成三角形，所以要除以二。
76	[00:05:59.90]	老師	ok，很好。再來，梯形跟平行四邊形的關係是什麼？
77	[00:06:04.59]	小朋友	只要兩個一樣大的梯形合在一起，就可以變成平行四邊形。
78	[00:06:10.28]	小朋友	那兩個被切掉的梯形，合起來的面積跟原本那個平行四邊形的面積一樣大。
79	[00:06:19.67]	老師	所以你黑板上切的梯形，每一個梯形都多大？
80	[00:06:24.50]	小朋友	三個格子大。
81	[00:06:25.85]	老師	那如果我需要一個面積是三格的梯形，要從多大的平行四邊形裡切出來？
82	[00:06:32.00]	小朋友	六大格。
83	[00:06:33.21]	老師	六大格，如果我要一個六大格的梯形，要從多大的平行四邊形切出來？
84	[00:06:40.03]	小朋友	12格大。
85	[00:06:41.23]	老師	所以梯形面積要怎麼算？
86	[00:06:42.76]	小朋友	如果是平行四邊形切成一半的梯形，那只要把平行四邊形的面積除以二就好。
87	[00:06:49.89]	小朋友	梯形的公式應該是上底加下底乘以高除以二。
88	[00:06:56.21]	老師	為什麼？
89	[00:07:00.39]	小朋友	因為它.....
90	[00:07:03.32]	老師	這裡有兩個梯形。
91	[00:07:04.58]	小朋友	對。
92	[00:07:05.13]	老師	對嗎，這一個在那個梯形的哪裡？
93	[00:07:08.05]	小朋友	這個。
94	[00:07:08.59]	老師	這一段在那個梯形的哪裡？
95	[00:07:11.08]	小朋友	這一段在這裡，然後這一段在這裡。
96	[00:07:15.72]	老師	所以，這個加這個。
97	[00:07:19.47]	小朋友	就等於那個平行.....。
98	[00:07:21.87]	老師	原來平行四邊形的。
99	[00:07:24.16]	小朋友	長度，
100	[00:07:24.97]	老師	長度，好，同一個平行四邊形，可以有幾個平分成兩塊的辦法？第一組覺得有幾種？
101	[00:07:31.20]	小朋友	兩種。
102	[00:07:32.27]	老師	兩種，哪兩種？
103	[00:07:33.39]	小朋友	一橫一橫這樣子，然後這樣子。
104	[00:07:36.19]	老師	第二組，幾種？
105	[00:07:37.24]	小朋友	三種。
106	[00:07:38.17]	老師	哪三種？
107	[00:07:39.14]	小朋友	梯形、三角型，還有平行四邊形。
108	[00:07:42.90]	老師	幾種？四種，哪四種？
109	[00:07:46.16]	小朋友	橫的、直的，然後斜的兩條。
110	[00:07:49.67]	老師	你們覺得呢？
111	[00:07:50.94]	小朋友	六。
112	[00:07:52.05]	老師	六，哪六？
113	[00:07:52.77]	小朋友	橫著一條、直著一條、然後斜的兩條。
114	[00:07:57.38]	老師	還有嗎？

115	[00:07:58.25]	小朋友	沒有。
116	[00:07:58.95]	老師	沒了，有沒有這一條？
117	[00:08:02.64]	小朋友	有。
118	[00:08:03.67]	老師	有，是嗎？好囉，看好囉，見證奇蹟的時候到了。你要觀察被它切成兩半的是不是都是雙胞胎，所以到底有幾種？
119	[00:08:30.41]	小朋友	無限。
120	[00:08:32.59]	老師	好了，下課。
<b>微型活動三：創形並檢驗面積</b>			
121	[00:08:40.05]	老師	阿土伯看起來像是發財了，所以他做什麼事？
122	[00:08:45.95]	小朋友	買新土地。
123	[00:08:46.07]	老師	他買了新土地，好。那你猜他的土地會買在空空的地方，還是別人的地板上？
124	[00:08:56.86]	小朋友	空空的地方。
125	[00:08:58.59]	老師	好，什麼是空空的地方？什麼顏色是空空的地方？
126	[00:09:01.33]	小朋友	灰色。
127	[00:09:03.56]	老師	那個接近灰色，接近土色那個顏色。
128	[00:09:05.63]	小朋友	對。
129	[00:09:06.35]	老師	ok，所以別人的地和河流可以侵占嗎？
130	[00:09:10.30]	小朋友	不行。
131	[00:09:10.97]	老師	不行哦，好。那現在啊，你的桌上有跟我的螢幕上完全一樣的東西，一個人先拿一張，你用鉛筆先畫，畫完之後，你要寫個算式確認你畫的真的是12平方單位。確認沒有問題了，你才用藍筆寫上去。
132	[00:09:47.74]	小朋友	我今天做了一個長方形，它的長是四格，然後寬是三格，所以是4乘以3等於12平方。
133	[00:10:02.51]	小朋友	這個是三角形，高有.....四格，然後底有六格，4乘6除2等於12，所以這個是12平方公分。
134	[00:10:19.04]	小朋友	它的上底有兩格，下底有四格，然後高有四格，所以是2加4乘以4除以2等於12，12平方公分。
135	[00:10:31.04]	小朋友	這個是平行四邊形，底有四格，高有三格，4乘3等於12，等於12平方公分。
136	[00:10:40.51]	老師	我發現你有一個很棒的圖形，有沒有很厲害，
137	[00:10:49.94]	小朋友	有。
138	[00:10:50.17]	老師	有，來，誰可以上臺說你看懂什麼？
139	[00:10:53.79]	小朋友	因為這中間完整的正方形有八格，所以首先先用8，然後再把這兩格變成一格，這種三角形的有四格，所以再加4，所以是12格。我畫的圖形是不規則形，可是只要把中間畫成再加一條線，它就會變成兩個，兩個可以算出面積的圖形，所以這個畫出來之後，這邊是長方形，這邊的寬是兩格，長是三格，所以2乘3等於6，這邊是六平方單位，這邊是平行四邊形的底是三格，高是兩格，所以是3乘2等於6，然後再把這兩邊的六加來，就是12。
140	[00:11:48.51]	小朋友	這裡有四格，這裡有八格，四加9等於12。

141	[00:11:54.29]	小朋友	這個是一個正方形，然後3乘3等於9，然後下面這個是1乘3等於3，所以9加3等於12。
142	[00:12:04.89]	小朋友	這個是梯形，上底加下底乘高除以2，所以這是2加4乘2除以2等於6，加上這兩個等於一個圖形，也等於12。
143	[00:12:23.47]	小朋友	這一個的底是三公分，高是四公分，所以3乘4等於12，再除2等於6，這個也是，然後兩個6加起來就等於12。
144	[00:12:43.20]	小朋友	這裡切一半，然後變成平行四邊形，然後就.....6乘以1等於6，然後這裡也是一樣的，然後6加6等於12這樣子。
145	[00:12:56.96]	老師	有沒有人的分割方法不一樣？
146	[00:12:59.57]	小朋友	這個可以把這個切過來，再移到這邊去，然後這邊是六格，6乘1等於12。
<b>微型活動四：切割與重構發現截彎取直面積一樣</b>			
147	[00:13:15.81]	老師	阿土伯蓋公園，公園需要什麼條件？
148	[00:13:19.31]	小朋友	有地、夠大。
149	[00:13:22.40]	老師	要有地嘛對不對？要有植物，所以阿土伯損了一塊什麼樣的啊？
150	[00:13:32.59]	小朋友	梯形，可是有紅色的面積。
151	[00:13:36.07]	老師	ok，所以意思就是你剛說公園要有路，然後要種植物嘛，所以什麼地方是路，什麼地方是花？
152	[00:13:48.04]	小朋友	綠色的地方是花，紅色是路。咖啡色是路。
153	[00:13:54.82]	老師	好，所以你現在要計算什麼色的面積？
154	[00:13:59.29]	小朋友	種花的面積，綠色，綠色的面積。
155	[00:14:02.54]	老師	綠色的面積，所以一個人要提出幾種辦法？
156	[00:14:07.77]	小朋友	三種。
157	[00:14:08.14]	老師	三種，我希望你提出的辦法跟別人不要完全一樣。
158	[00:14:29.02]	小朋友	剪歪了。
159	[00:14:38.67]	小朋友	我把它切成三個梯形一個三角形，這是第一個梯形，這是第二個梯形，這是第三個梯形，這是三角形。
160	[00:14:50.93]	小朋友	我把這個梯形分成了五個三角形，然後把它算出來的全部去把它加起來。
161	[00:15:01.32]	小朋友	我把這整個梯形切一半，然後上面的梯形再減這個平行四邊形的面積，下面的梯形也一樣。
162	[00:15:10.85]	小朋友	我的做法是把中間這邊切一條線，然後分成兩個平行四邊形，再用梯形的總面積減掉這兩個平行四邊形的面積，就會是旁邊菜園的面積。
163	[00:15:27.54]	小朋友	我把中間，中間這一條通道剪掉，然後再把它黏在一起，它就會變成一個梯形，然後再算這個梯形的面積就是答案了。
164	[00:15:40.18]	老師	再來，我要發下一個公園，你要計算的也是投影上面綠色的部分，它的面積。
165	[00:16:05.14]	老師	你在螢幕上面看到些什麼呢？

166	[00:16:09.10]	小朋友	都是梯形，然後中間都有一條彎彎的線。
167	[00:16:12.97]	小朋友	它們都有用剪刀剪過。
168	[00:16:15.77]	老師	剪了什麼呢？
169	[00:16:17.34]	小朋友	把中間河剪掉。
170	[00:16:19.83]	老師	中間的.....。
171	[00:16:20.98]	小朋友	那個步道。
172	[00:16:21.92]	老師	通道減掉。那為什麼上一個圖形，不是大家都把通道剪掉呢？
173	[00:16:29.01]	小朋友	這次的那個步道，因為它沒辦法就是切割成一個圖形，就沒辦法去算。
174	[00:16:38.16]	老師	所以剛才的步道可以.....。
175	[00:16:40.21]	小朋友	剛才的步道它可以去切。
176	[00:16:43.50]	老師	切什麼？
177	[00:16:43.46]	小朋友	切成平行四邊形，但是這個不行。
178	[00:16:48.28]	老師	好，接下來，這裡有四個圖形，先說說看它們在做什麼事情。
179	[00:16:54.39]	小朋友	不是的，他就把它畫叉叉，然後把它移來這裡。
180	[00:16:57.69]	老師	好，所以底下的叉叉不要，換成？
181	[00:17:03.08]	小朋友	是勾的才要。
182	[00:17:04.47]	老師	ok，所以叉叉跟勾的那一塊有一樣嗎？
183	[00:17:06.85]	小朋友	有。
184	[00:17:08.39]	老師	各位你有看到嗎？
185	[00:17:09.82]	小朋友	這裡。
186	[00:17:11.42]	老師	把叉叉不要，搬到哪裡去？
187	[00:17:13.65]	小朋友	搬到勾勾。
188	[00:17:14.84]	老師	ok，那上面呢？
189	[00:17:16.46]	小朋友	上面也是一樣。
190	[00:17:17.93]	老師	好，所以那個S型的馬路，跟長方形的面積會相同嗎？
191	[00:17:23.85]	小朋友	會。
192	[00:17:25.08]	老師	為什麼會？
193	[00:17:26.31]	小朋友	因為它們都一樣。
194	[00:17:27.52]	老師	搬過去的.....。
195	[00:17:29.26]	小朋友	那個面積都一樣。

## 國 中 小 數 學 公 開 觀 課 記 錄 表

單元名稱	班級	日期與時間	教學者	觀察者
觀察 主 軸	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">學習者</div> 甲：有趣、有感 乙：有自己的想法、有機會表達(生生共建)		二十一世紀八大思考素養： 批判性思考、研究與探究、自主堅持、資訊使用、系統性思維、溝通、 反思、創造力。	
	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">教學任務</div> 丙：診斷與共建(師生)			
教學任務			學習活動	

教學者活動	學生活動

## 國 中 小 數 學 公 開 議 課 記 錄 表

請在橫軸中填入你在觀課過程中看見的 2 至 3 個八大思考素養，並搭配縱軸中甲、乙、丙三個面向，以事件具體描述的方式完成下列表格。

八大思考 素養 三個面向			
<b>甲：有趣、有感</b> (學習活動有趣， 能引動學習思考； 展現學生有感的 學習。)			
<b>乙：有自己的想法、有機會表達</b> (學生主動參與， 展現生生共建)			
<b>丙：診斷與共建</b> (教學任務適時介 入診斷，提供師生 共建機會。)			



## 《數學素養微課程：三角形分類的系統性思維》

模組名稱	三角形分類的系統性思維		設計師	侯雪卿		
適用年級(主題)	4年級(S)		指導教授	鄭英豪		
數學主題	三角形分類的系統性思維		21世紀思考素養	系統性思維		
微型活動	影片名稱	原教案名稱	適用課本單元	使用的三元素		
一	建立各種三角形邊的關係、角的關係	比較三角形邊與內角的大小	三角形構成要素	找元素	找關係	
二	三角形分類：用邊(角)的特徵分類與命名	以等邊數量進行三角形分類	認識正三角形、等腰三角形	找元素	找關係	建系統
		以等角數量進行三角形分類				
三	三角形分類：用角的類型分類與命名	發現三角形至少有兩個銳角，用第三角分類	認識直角三角形、銳角三角形、鈍角三角形	找元素	找關係	建系統
四	二種三角形分類系統的整合	三角形邊角交集7個類型	認識等腰直角三角形	找元素	找關係	建系統
	(未拍攝)	角的類型	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 認識角</li> <li>• 比較角的大小</li> <li>• 認識直角、銳角和鈍角角度</li> </ul>	找元素	找關係	建系統

註：微型活動序號為影片版序號。



[https://youtu.be/cKJdhndom\\_c](https://youtu.be/cKJdhndom_c)

## 壹、單元學習目標

S-3-1 角與角度（同 N-3-13）：以具體操作為主。初步認識角和角度。角度的直接比較與間接比較。認識直角。

S-4-7 三角形：以邊與角的特徵認識特殊三角形並能作圖。如正三角形、等腰三角形、直角三角形、銳角三角形、鈍角三角形。

## 貳、素養微課程活動設計目標與核心概念

### 一、數學單元或主題：三角形

### 二、課程目標與核心概念：

(一)在三角形單元教學中，穿插安數個的素養微型活動，使得教師能在順利完成數學內容教學的同時亦兼顧培養學生數學中的系統性思維。

(二)增加數學教師對學生系統性思維的了解。

### 三、21 世紀素養技能：

**系統性思維**：系統性思維是一種能整體性看待，處理周遭一切的思考技能，以三個面向來發展學生的系統性思維(王婷瑩，2021)：

表 1：系統性思維三元素說明表

三元素	說明
找元素	以任務目標為導向，在操作與解題過程中，覺察、生成有意義的元素(變數、組成成分)等
找關係	以任務目標為導向，在操作與解題過程中，覺察、生成元素間的關係、局部結構
建系統	以任務目標為導向，在操作與解題過程中，將多個元素、關係、局部結構組織起來，生成一個系統；或從一個建好的系統中，覺察、找出元素關係、局部結構

## 參、三角形類型的系統性思維說明

三角形是由三條邊所圍成的圖形，它產生三個頂點、三個角，其內角和為 180 度。現行課綱四年級學習內容是利用組成要素邊和角的特徵，區分三角形的種類。本活動三角型類型的系統性思維，是以等邊數量、等角數量、最大角類型、第三角類型、邊角交集來分類三角形。

### (一)以等邊數量分類三角形

以等邊數量來進行三角形的分類與命名，可將所有的三角形區分為三條邊都等長、恰有兩條邊等長、三條邊都不等長三類，其包含關係如圖 1。三條邊等長稱為正角形；恰有兩條邊等長的三角形稱為等腰三角形；最後一種是三邊不等長的三角形，由於在國小階段，三邊不等長的三角形沒有特殊的性質可以討論，因此教材不進行此類三角形的命名活動。

### (二)以等角數量分類三角形

等邊和等角分類結果一樣的。三條邊等長的三角形滿足三個角都相等，均為 60 度，恰有兩條邊等長的三角形滿足恰有兩個角都相等的三角形，三邊不等長的三角形，三個角都不相等。

### (三)三角形中至少有兩個銳角，以第三角分類三角形

三角形中至少有兩個銳角，以第三角分類三角形，和以最大角分類三角形結果一樣的。一個三角形中，最多有3個銳角，至少有2個銳角。原因：在平面上三角形的內角和等於 $180^\circ$ ，一個三角形有3個角，當三角形為銳角三角形時，有3個銳角，當三角形為直角三角形或鈍角三角形時，則有兩個銳角，最多只有一個鈍角或一個直角。所以，任一個至少會有兩個銳角，第三個角的類型可能是：銳角、直角、鈍角。

因之，以第三角分類三角形，三內角都是銳角的三角形，稱為銳角三角形；第三角是直角，另外兩個角為銳角的三角形，稱為直角三角形；第三角是鈍角，另外兩個角為銳角的三角形，稱為鈍角三角形。

### (四)以最大角分類三角形(和第三角分類的結果一樣)

三角形的內角和為 $180^\circ$ 度，三個內角中最大角的角度會大於或等於 $60^\circ$ 度，會小於 $180^\circ$ 度，也就是最大角可以是銳角( $60^\circ \leq x < 90^\circ$ )，也可以是直角( $x = 90^\circ$ )，也可以是鈍角( $90^\circ \leq x < 180^\circ$ )。因此，可以透過三角形內角中最大角是直角、銳角或鈍角的關係，將所有的三角形區分為直角三角形，銳角三角形與鈍角三角形三類，這三類三角形兩兩的交集都是空集合，而它們的聯集是所有的三角形。

因之，從最大角來區分三角形，三個內角都是銳角的三角形，稱為銳角三角形；有內角中最大角是直角，另外兩個角為銳角的三角形，稱為直角三角形；有內角中最大角是鈍角，另外兩個角為銳角的三角形，稱為鈍角三角形。

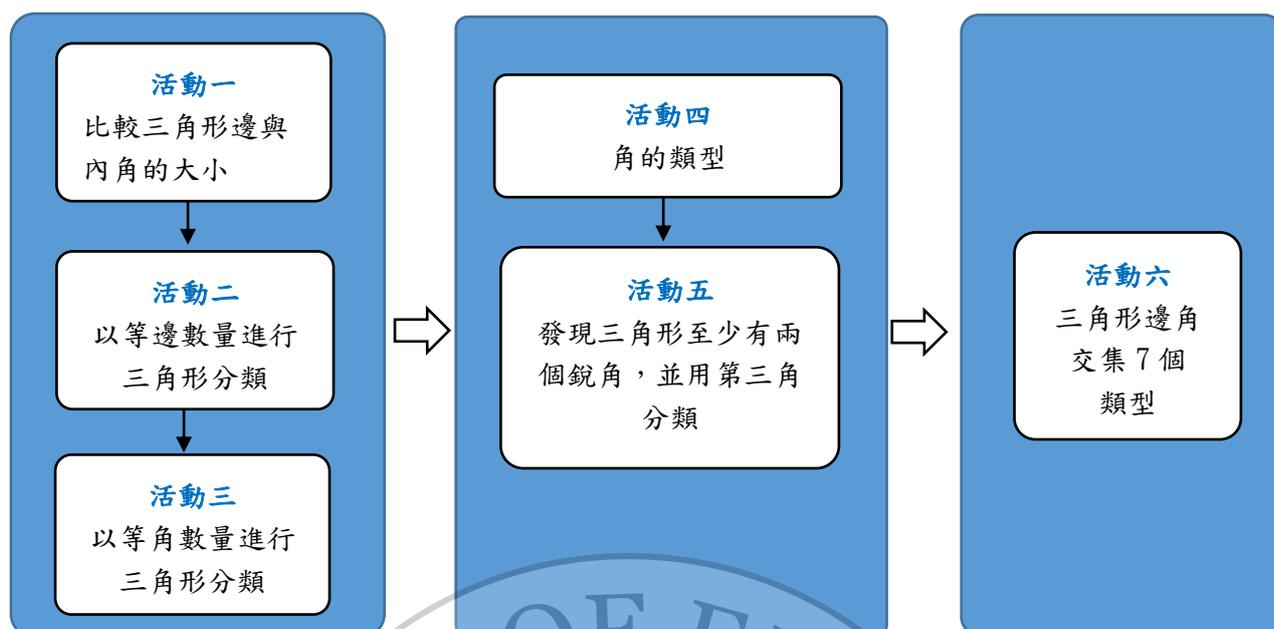
### (五)邊角交集的三角形類型

以等邊分成三類，以角也可以分成三類，應該可以分成九類，實際只有七類，沒有直角和鈍角的等邊三角形。

三角形邊角交集七個類型表

等邊分類 三角形角類型	等邊	等腰	不等邊
銳角三角形	✓	✓	✓
直角三角形		✓	✓
鈍角三角形		✓	✓

#### 肆、三角形類型微課程活動架構圖



圖：三角形類型微課程活動架構圖

##### 一、各活動的系統性思維

本活動是以三角形組成要素的條件分析三角形，將三角形分成不同的種類，活動一二三是等邊等角的分析、活動二是角類型的分析、活動三是邊角交集的統整。

活動一二三：培養三角形**等邊等角**兩類等價的系統性思維，三角形種類分成等邊三角形、等腰三角形、不等邊三角形。

活動四五：培養三角形**角類型**分類的系統性思維，將三角形種類分成直角三角形、銳角三角形、鈍角三角形。

活動六：培養三角形**邊角交集類型**的系統性思維，將三角形種類分成等邊銳角三角形、等腰銳角三角形、等腰直角三角形、等腰鈍角三角形、不等邊銳角三角形、不等邊直角三角形、不等邊鈍角三角形。

二、各活動的教學內容與教科書活動內容元比較說明表

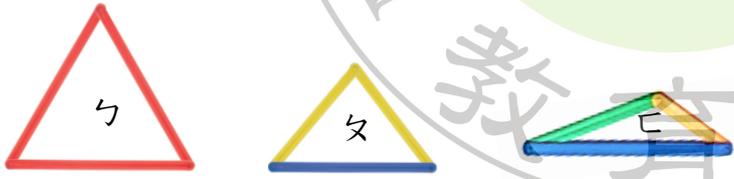
活動	教學內容	與教科書內容比較說明
活動一	透過操作與檢驗，比較三角形邊與內角的大小。	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 增加用扣條操作做出三角形，做好的例子正好是課本例題的情境，可直接融入單元內容。</li> <li>2. 用扣條操作，等邊不用測量，等角也可以用扣條三角形直接比較，不用測量。</li> <li>3. 增加提問句：「你發現什麼？」「你怎麼知道的？」激發學生能觀察到等邊、等角的關係，並提供學生溝通表達的機會。</li> </ol>
活動二	觀察三角形的邊並進行分類。	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 原情境為 6 個三角形圖形改以扣條組成三角形，並補充等腰鈍角的三角形、不等邊銳角三角形兩種圖形。扣條的等邊、等角不用測量，只需操作。</li> </ol>
活動三	觀察三角形內角並進行分類。	<ol style="list-style-type: none"> <li>2. 增加分類任務，激發學生發現三邊、三內角的關係，建立三角形等邊等角兩類等價系統。</li> </ol>
活動四	透過操作、比較、分類與命名，認識角的類型：直角、鈍角和銳角。	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 增加主動造例並描繪角的活動，利用扣條開合做出多樣性的角，有感角張開的大小。</li> <li>2. 增加角類型的命名活動，有助於自然語言到數學語言的演化。</li> <li>3. 透過操作、描繪和比較活動，有目標地引導學生自然而然把角的一邊固定在水平方向，發展角類型的典型圖，建立角類型的系統。</li> </ol>
活動五	發現每個三角形都有兩個銳角，以第三角分類三角形。	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 調整原教科書 8 個三角形三個角的方位，把底邊固定在水平方向，與角類型的典型圖連結，第三角比較好參照與分辨。</li> <li>2. 角類型判斷，捨掉測量，鼓勵直觀輔以直角板(三角板或直尺邊緣)比對，將元素(鈍角、銳角、直角、數量)表現出來。</li> <li>3. 增加表格記錄、分類任務與命名，激發學生觀察一個三角形中兩個銳角和第三角類型的關係，建立以第三角區分三角形類型的系統性思維。</li> </ol>
活動六	三角形邊角雙重分類，建立三角形邊角交集 7 個類型。	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 教科書出現了邊角交集的其中一類：等腰直角三角形。本活動設計可以取代等腰直角三角形的學習內容，改以邊角交集雙重分類來學習。</li> <li>2. 增加表格記錄、分類、操作與命名，統整學生邊角分類系統性思維，建立三角形邊角交集 7 個類型。</li> </ol>

肆、三角形類型微課程活動與系統性思維三元素的對應表

思考技能 微型活動	系統性思維			備註																
	找元素	找關係	建系統																	
活動(一) 比較三角形邊與內角的大小	√	√		元素：三角形、邊與內角 關係：「等或不等」及「相等的數量」 小系統：兩個分類系統等價 等邊△、等腰△、不等邊△																
活動(二) 以等邊數量進行三角形分類	√	√	√																	
活動(三) 以等角數量進行三角形分類	√	√	√																	
活動(四) 角的類型	√	√	√	元素：角 關係：大小 小系統：鈍角、銳角、直角																
活動(五) 發現三角形至少有兩個銳角，並用第三角分類	√	√	√	元素：三角形、內角 關係：等不等，大小、特別角、銳角數量、直角數量、鈍角數量 小系統： 每個三角形至少有兩個銳角 每個三角形的第三角可能是銳角或直角或鈍角 銳角△、直角△、鈍角△																
活動(六) 三角形邊角交集 7 個類型	√	√	√	系統： <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <thead> <tr> <th></th> <th>等邊</th> <th>等腰</th> <th>不等邊</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>銳角</td> <td>√</td> <td>√</td> <td>√</td> </tr> <tr> <td>直角</td> <td></td> <td>√</td> <td>√</td> </tr> <tr> <td>鈍角</td> <td></td> <td>√</td> <td>√</td> </tr> </tbody> </table>		等邊	等腰	不等邊	銳角	√	√	√	直角		√	√	鈍角		√	√
	等邊	等腰	不等邊																	
銳角	√	√	√																	
直角		√	√																	
鈍角		√	√																	

## 微型活動一：比較三角形邊與內角的大小

### 微型活動面向

教學內容	透過操作與檢驗，比較三角形邊與內角的大小。				
活動說明	1. 使用扣條組成等邊 $\triangle$ 、等腰 $\triangle$ 、不等邊 $\triangle$ 各一個。 2. 透過提問，促使學生觀察和比較三角形邊與內角的相等或不相等、相等的數量。				
活動過程	■啟思	■操作	■觀察	<input type="checkbox"/> 歸納或形成結論 <input type="checkbox"/> 詮釋結果	
系統性思維元素	■找元素 三角形(3個)、邊與內角		■找關係 「邊或內角相等或不等長」及「相等的數量」 <input type="checkbox"/> 建系統		
學習資源	分組實作，3~4人一組，每組1包扣條				
活動時間	10分鐘				
活動流程	活動過程		系統性思維元素		
<p>(一)喚起舊經驗</p> <p>教師提問：這是一個三角形嗎？你怎麼知道？</p>  <p>(二)發展活動</p> <p>1. 下圖用扣條做出的3個三角形。先用扣條做出三角形勺、夕、門，再回答問題：</p>  <p>(1)觀察三角形勺的三條邊和三個角，你發現什麼？你怎麼知道的？</p> <p>(2)觀察三角形夕的三條邊和三個角，你發現什麼？你怎麼知道的？</p> <p>(3)觀察三角形門的三條邊和三個角，你發現什麼？你怎麼知道的？</p> <p>2. 小組操作，發表想法</p> <p>3. 學生發表想法後，教師整理重點：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 三角形勺的三條邊等長、三個角相等</li> <li>2. 三角形夕有兩條邊等長另一邊不等長、兩個角相等另一</li> </ol>		<p>觀察</p> <p>啟思 觀察</p>		<p>■找元素 三角形(3個)、邊與內角</p> <p>■找關係 「邊或內角相等或不等長」及「相等的數量」</p>	

個不相等

3. 三角形內的三條邊不等長三個角不相等。

(一)與教科書內容比較說明：

1. 改編康軒版四上教科書三角形單元活動二正三角形、等腰三角形
2. 增加三色扣條組成三角形、讓學生實際組出三角形。
3. 增加提問，激發學生觀察和檢驗邊和內角是否相等和相等的數量。

**1** 用扣條做出 3 條邊都一樣長的三角形。

3 條邊都一樣長的三角形，叫作**等邊三角形**，也叫作**正三角形**。

**2** 下圖中的 2 個三角形，都是正三角形，用直尺檢查看看。再用量角器量量看，正三角形的 3 個角各是幾度？

3 個角都是 60 度。 3 個角都一樣大。

正三角形的 3 條邊一樣長，3 個角也一樣大，都是 60 度。

**3** 用扣條做出有 2 條邊一樣長的三角形。

有兩條邊相等的三角形，叫作**等腰三角形**。

**4** 使用直尺檢查附件的三角形，都是等腰三角形嗎？

觀察等腰三角形的 3 個角，你發現什麼？

我用量角器量，都有兩個一樣大的角。

我用摺的來比比看，有兩個角可以完全重疊，所以兩個角一樣大。

(二)教學說明：

1. 用扣條做出的 3 個三角形，學生做得到，而且做完後就剛好是課本例題的狀態，直接融入單元內容。
  2. 讓學生操作，用扣條複製和老師一樣的三角形，用意是扣條的顏色表徵長度量，幾條邊等長就不用測量，只需操作，用顏色來辨識。
  3. 幾個角相等也可以用扣條複製一個全等的三角形，直接比較三個角，不用測量。
  4. 課本內容是直接宣告幾條邊一樣長，透過量角器測量幾個角相等
- 本活動增加提問：

「你發現什麼？」激發學生能找到邊、角的元素，並進一步思考三邊或三內角有什麼關係？

「你怎麼知道的？」提供學生溝通機會，說明想法或做法。

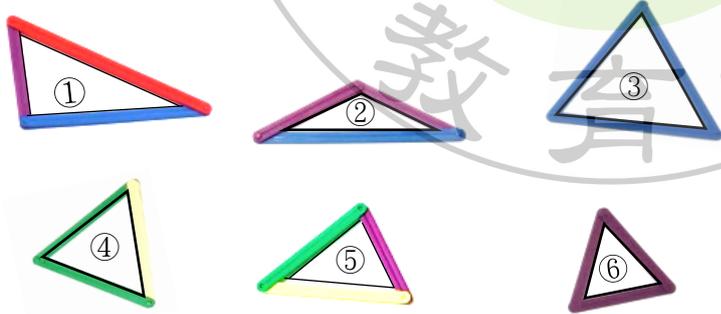
## 微型活動二：以等邊數量進行三角形分類

### 微型活動面向

教學內容	觀察三角形的邊並進行分類			
活動說明	3. 觀察給定三角形之三邊的特徵，並利用邊的關係進行描述。 4. 透過分類活動，發現三角形三條邊的等長或不等長、等長的數量。			
活動過程	■啟思	■操作	■觀察	■歸納或形成結論 <input type="checkbox"/> 詮釋結果
系統性思維元素	■找元素 三角形、邊	■找關係 「邊等長或不等」及 「相等的數量」	■建系統 等邊△、等腰△、不等邊△	
活動材料	分組實作，3~4人一組，每組6個三角形(由扣條組成，如下圖)			
活動時間	12分鐘			
活動流程		活動過程	系統性思維元素	
<p>1. 觀察每個三角形的三條「邊」，把共同特徵歸一類。</p> <p>教師提問： 6個三角形可以分成幾種？ 每一種共同的特徵是什麼？ 同一種類的三角形可以取什麼名字？</p> 		<p>■ 啟思 ■ 操作 ■ 觀察</p>	<p>■找元素 三角形、邊</p> <p>■找關係 「邊等長或不等長」及「相等的數量」</p>	
<p>2. 各小組操作並發表分類想法</p> <p>3. 教師歸納： 用「邊」分類三角形，可以分成三種 三邊等長的三角形，取名：等邊三角形，課本稱它是正三角形。 只有兩邊等長的三角形，取名：等腰三角形 三邊不等長的三角形，取名：不等邊三角形。</p>		<p>■歸納或形成結論</p>	<p>■建系統 等邊△、等腰△、不等邊△</p>	

### 微型活動三：以等角數量進行三角形分類

#### 微型活動面向

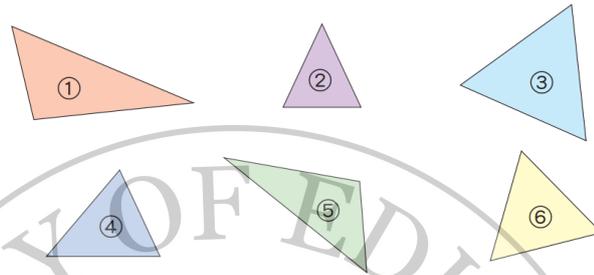
教學內容	觀察三角形內角並進行分類。			
活動說明	1. 觀察給定三角形之三內角的特徵，並利用角的關係進行描述。 2. 透過分類活動，發現三角形內角相等或不相等、相等的數量。 3. 透過反思，觀察到等邊等角分類三角形的結果相同。			
活動過程	■啟思	■操作	■觀察	■歸納或形成結論
系統性思維元素	■找元素 三角形、內角		■找關係 「內角相等或不相等」及「相等的數量」	■建系統 等邊△、等腰△、不等邊△ 等邊和等角兩個分類系統等價
活動材料	分組實作，3~4人一組，每組6個三角形(由扣條組成，如下圖)			
活動時間	20分鐘			
	活動流程	活動過程	系統性思維元素	
	1. 老師說明：我們用幾條邊等長分類三角形，是否能用幾個角相等來分類三角形？ 2. 請學生進行等角的分類觀察每個三角形的三個「角」，把共同特徵歸一類。 教師提問： 6個三角形可以分成幾種？ 每一種共同的特徵是什麼？ 同一種類的三角形可以取什麼名字？ 	啟思 操作 觀察	■找元素 三角形、內角 ■找關係 「內角相等或不相等」及「相等的數量」	
	3. 各小組操作並發表分類想法 4. 教師歸納： 可以以幾個角相等分類三角形，分成三種： 三個角相等、只有兩個角相等和三個角不相等三角形。	歸納或形成結論	■建系統 等邊△、等腰△、不等邊△	
	5. 邊角分類反思與統整 教師展示活動二和三分類結果並提問：「觀察這兩種	詮釋結果	■建系統	

分類的結果，有什麼關係？說說看，你的發現」整理學生的發現，歸納出等邊等角分類三角形的結果相同。		等邊和等角兩個分類系統等價
---	--	---------------

(一)與教科書內容比較說明：

1. 改編康軒版四上教科書三角形單元活動二正三角形、等腰三角形的做做看題型
2. 情境改為給定扣條組成的6個三角形，扣條的等邊不用測量，只需操作。等角也可以用扣條三角形直接比較，不用測量。減少測量耗時、需要的技巧和可能的誤差。
3. 替換兩個三角形圖形，補足類型  
原等腰(銳角)三角形②改為等腰(鈍角)三角形，原不等邊(鈍角)三角形⑤改為不等邊銳角三角形
4. 以提問和分類任務，激發學生發現等邊數量的關係，建立以等邊分類三角形的系統性思維。

量量看，並回答問題。



- (1) 哪些三角形的 3 條邊都一樣長？( )
- (2) 哪些三角形只有兩條邊一樣長？( )
- (3) 哪些三角形的 3 個角都一樣大？( )
- (4) 哪些三角形只有兩個角一樣大？( )

(二)活動一-2、一-3 的教學說明：

1. 本活動的情境用扣條組成三角形，等角的發現可以用扣條三角形直接比較，不一定需要用到量角器測量，可以避免：測量耗時、需要的技巧和可能的誤差。
2. 正三角內角 60 度的學習，可以在本活動角分類做完後，用量角器來認識，或者移到五年級專門處理內角和 180 度，引入正三角內角 60 度的學習。
3. 各組的分類與發表，教師可透過追問來確認學生的想法。
4. 當學生已經有等邊和等角分類三角形的知識後，教師可用提問方式激發學生思考和發現以等邊和等角分類三角形的關係，觀察到分類結果是一樣，並提供機會讓學生思考探索，發現邊與對角(角與對邊)的大小關係。

## 微型活動四：角的類型

### 微型活動面向

教學內容	透過操作、比較、分類與命名，認識角的類型：直角、鈍角和銳角。			
活動說明	5. 利用兩根扣條做出一個直角和另一個與直角不一樣的角。 6. 描繪扣條做出的角(直角和另一個與直角不一樣的角)。 7. 透過直觀和直接比較，發現三種角：直角、比直角小的角、比直角大的角。 8. 透過分類與命名，認識角的類型：直角、鈍角和銳角。			
活動過程	■啟思	■操作	■觀察	■歸納或形成結論 <input type="checkbox"/> 詮釋結果
系統性思維元素	■找元素 角、直角	■找關係 大小	■建系統 直角、鈍角和銳角	
活動材料	分組實作，每組 3-4 人 每組 1 包大型扣條、工作單(附件)、彩色筆			
活動時間	10 分鐘			
活動流程	活動過程		系統性思維元素	
1. 做出直角 ① 每位學生利用兩根扣條做出一個直角 ② 教師提問：要怎麼確認做出來的角一定是直角？ ③ 教師請學生在工作單上將做出的直角描繪下來(附件) 2. 做出和直角不一樣的角 ① 每位學生利用兩根扣條做出跟直角"不一樣"的一個角 ② 教師提問：觀察做出的角，說說看，比直角大？比直角小？ ③ 教師請學生直接將做出的角和直角比一比，檢驗②的想法，並在工作單上描繪下來(附件) 3. 全班進行分類和命名 ① 教師請全班將造出的角展示在黑板，分成三類：直角、比直角小的角、比直角大的角。 ② 教師提問：「這三類角的大小，有什麼關係？幫他們取個名字」 ③ 請小組討論後發表想法 4. 教師歸納角的類型：直角、鈍角、銳角	操作 觀察  操作 觀察  觀察 啟思  歸納或形成結論		■找元素：角、直角  ■找元素：角、直角  ■找元素：角、直角 ■找關係：大小  ■建系統：直角、鈍角和銳角	

(一)與教科書內容比較說明：

1. 比較三上角單元的三家教科書內容(康軒、南一、翰林)，都是給定角的圖形和直角比大小，直接宣告，引出鈍角、銳角的認識。

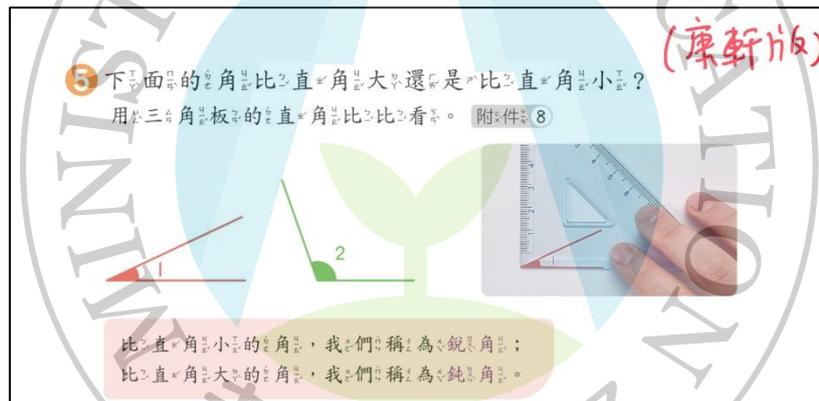
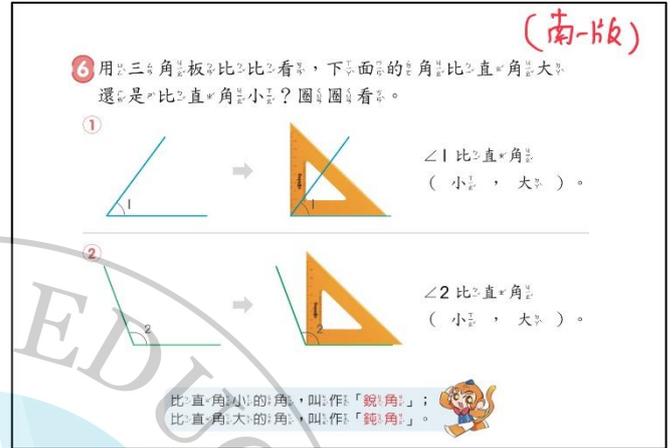
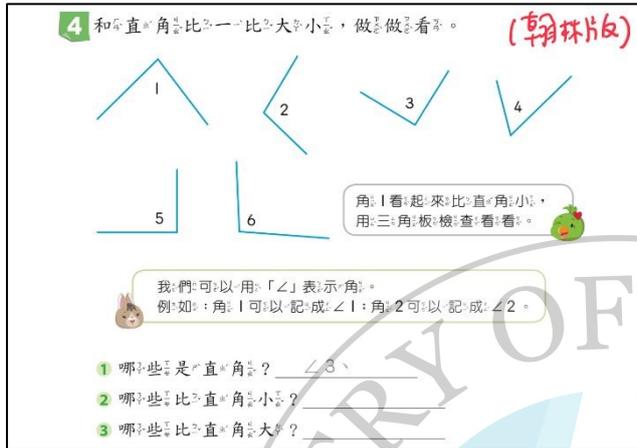
2. 改編的想法：

(1)造例並描繪：利用扣條開合做出多樣性的角，有感角張開的大小。

(2)先直觀比較再檢驗，主動運用心象造例，激發思考。

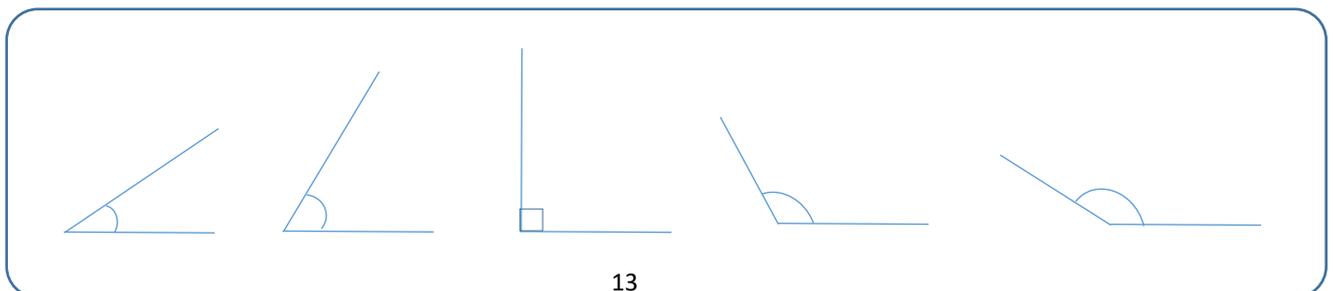
(3)與直角比較，有目標地引導學生自然而然把角的一邊固定在水平方向，發展角類型的典型圖。

(4)命名：有助於自然語言到數學語言的演化。



(二)教學說明：

1. 本活動進行時，學生已學過直角。因此，用兩根扣條做出一個直角時，學生可以利用身邊常見的直角材料，例如：三角板、桌角…，確認造出的是直角。
2. 先讓學生做跟直角"不一樣"的角，產生角的多樣性(比直角小或大)，再讓學生直觀去分辨該角比直角大或小，接著透過和直角直接比較檢驗想法。
3. 透過和描繪的直角直接比較，學生做法會自然而然把一邊固定在水平方向，發展出角類型的典型圖，比較好參照與分辨。



(1)把兩根扣條做出的直角描繪在下面：



(2)把兩根扣條做出和直角不一樣的角，描繪在下面：。

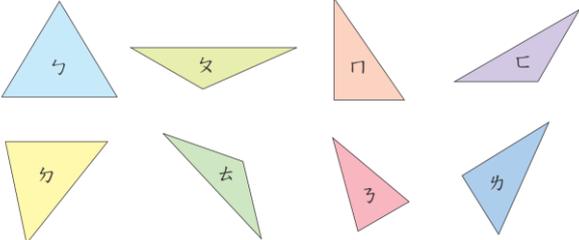




<ul style="list-style-type: none"> <li>· 有很多銳角、直角、鈍角很少</li> <li>· 有些三角形有三個銳角、有些有二個銳角</li> <li>· 每個三角形都有兩個銳角、至少有兩個銳角、最少有兩個</li> <li>· 個銳角</li> <li>· 剩下的角是有直角、銳角、鈍角</li> </ul> <p>4. 教師進行語言轉化：除了這兩個銳角外，剩下的角，我們稱為第三角</p> <p>5. 教師歸納兩個數學發現： 每個三角形都有(至少、一定)兩個銳角 第三角可能是直角、銳角或鈍角</p> <p>(三)發展活動 part(2)</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 教師提問：利用你的發現把 8 個三角形分類，分成幾種三角形？同一種的三角形，可以取什麼名字？</li> <li>2. 小組分享想法</li> <li>3. 教師歸納： 以第三角分類三角形和命名，可以分成三種：直角、銳角或鈍角三角形。</li> </ol>	<p>歸納或形成結論</p> <p>觀察 啟思 操作 歸納或形成結論</p>	<p>■建系統 每個三角形至少有兩個銳角和第三角可能是直角、銳角或鈍角。</p> <p>■找元素：內角 ■找關係：特別角、銳角數量、直角數量、鈍角數量 ■建系統：直角△、銳角△、鈍角△</p>
---	--	--

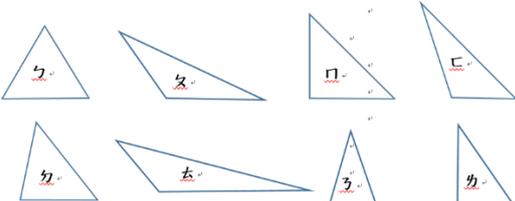
(一)與教科書內容比較說明：

1. 改編康軒版四上教科書三角形單元活動三直角、鈍角、銳角三角形
2. 調整原教科書 8 個三角形三個角的方位，底邊為水平，三個角看成位在左、右、上的位置(兩個銳角放在右、上的樣式，第三角在左)。
3. 角類型判斷：捨掉測量，避免耗時、測量技巧。先直觀判斷每個角的類型，無法判斷時可用直角板(三角板或直尺邊緣)比對，將"元素"(鈍角、銳角、直角、數量)表現出來。



分 類	三角形編號
1個直角、2個銳角	
1個鈍角、2個銳角	
3個都是銳角	

下圖有 8 個三角形，看圖回答下列問題：



(二)教學說明：

1. 角類型判斷，先以直觀判斷，無法判斷時，再引導學生可用直角板(三角板或直尺邊緣)比對。
2. 銳角、直角、鈍角的辨識基準是以直角為依據，教學中，可以透過提問：什麼是銳角？跟哪個角比？引導學生連結到舊經驗，以直角作為判斷。

3. 教學策略也可以用顏色區別鈍角、銳角、直角

也可以指導學生在內角塗上顏色，不同顏色代表不同類型的內角，黃色-銳角、綠-直角、紅-鈍角，透過以顏色的視覺區分角的類型，降低文字的認知負荷。

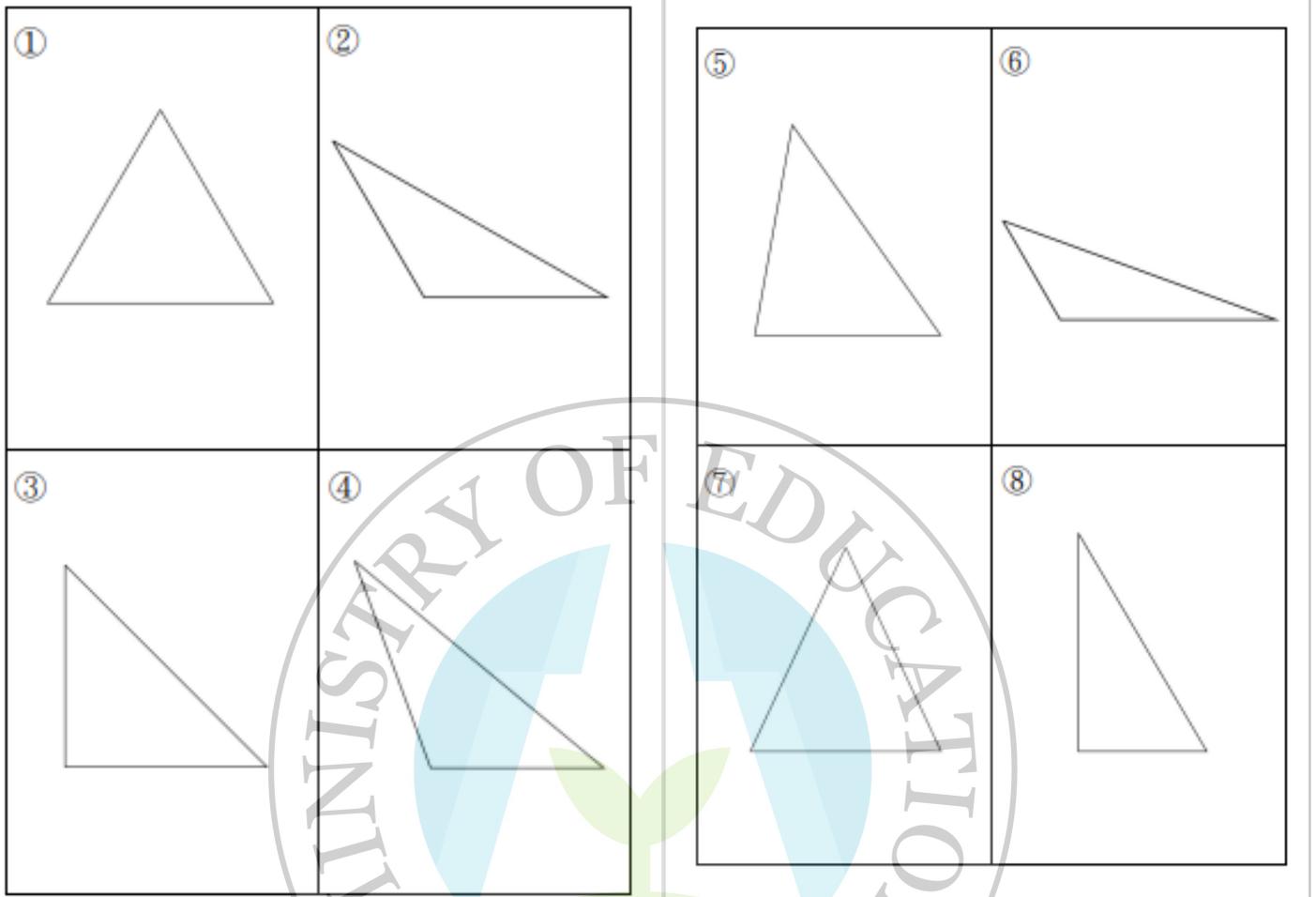
但教師須留意：「這8個三角形內角塗上顏色後，如果還有錯誤修改，圖的視覺可能會因為塗改有色差或線段模糊…圖形變得不易辨識，反而有礙於學習」。是故，可以請學生先用鉛筆標記並確認各三角形的內角類型正確性再上顏色。

4. 語言演化與數學發現

- 每個三角形中至少有兩個銳角，「至少」是邏輯語詞，對於小學生來說不容易學習，所以，老師需要介入，進行數學語言的演化，引導學生發現每個三角形都會有兩個銳角。
- 學生從表格紀錄的觀察，應該會說每個三角形有的兩個，有的三個，但教學現場，學生可能很難表達出精準的邏輯語言，所以，教學者可能直接問：可不可以說是至少有兩個，或者一定有兩個，歸納出每個三角形中至少有兩個銳角。
- 第三角是數學語言，所以，學生在描述時，可能會說是另一個角或角1，教學者可從每個三角形中至少有兩個銳角，帶出第三角的語言。
- 老師可以透過表格記錄歸納整理，發現每個三角形有兩個銳角、第三角是直銳鈍三種。

編號	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
角 1	銳角	鈍角	直角	鈍角	銳角	鈍角	銳角	直角
角 2	銳角							
角 3	銳角							

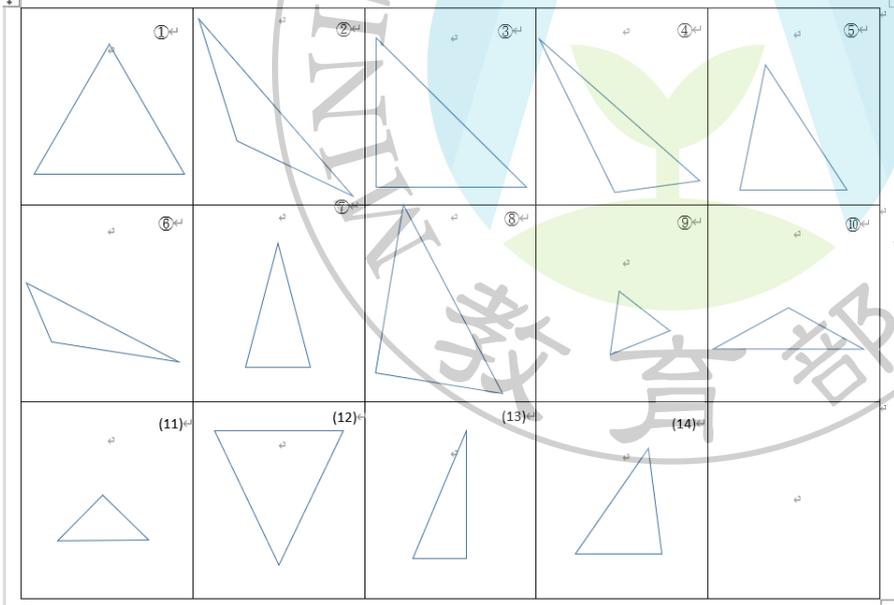
下圖有 8 個三角形，觀察每個三角形的三個角，根據你的觀察，填入直角、鈍角或銳角，完成下表的紀錄：



編號	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
角 1								
角 2								
角 3								

## 微型活動六：三角形邊角交集 7 個類型

### 微型活動面向

教學內容	三角形邊角雙重分類，建立三角形邊角交集 7 個類型。																			
活動說明	9. 觀察給定的三角形，分別進行邊和角的分類註記。 10. 將給定三角形進行邊角雙重分類。 11. 觀察雙重分類表，發現三角形邊角雙重分類的 7 種類型。 12. 使用扣條造例，做出三角形邊角交集 7 個類型的例子並命名。																			
活動過程	■啟思	■操作	■觀察	■歸納或形成結論 <input type="checkbox"/> 詮釋結果																
系統性思維元素	■找元素 三角形、邊、內角		■找關係 邊長等或不等及相等的數量、銳角數量、直角數量、鈍角數量	■建系統 <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <thead> <tr> <th></th> <th>等邊</th> <th>等腰</th> <th>不等邊</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>銳角</td> <td>✓</td> <td>✓</td> <td>✓</td> </tr> <tr> <td>直角</td> <td></td> <td>✓</td> <td>✓</td> </tr> <tr> <td>鈍角</td> <td></td> <td>✓</td> <td>✓</td> </tr> </tbody> </table>		等邊	等腰	不等邊	銳角	✓	✓	✓	直角		✓	✓	鈍角		✓	✓
		等邊	等腰	不等邊																
銳角	✓	✓	✓																	
直角		✓	✓																	
鈍角		✓	✓																	
活動材料	分組實作，每組 3-4 人；每組 1 包扣條、紀錄單(附件)、彩色筆																			
活動時間	15 分鐘																			
活動流程			活動過程	系統性思維元素																
1、教師展示 14 個三角形，提問引發學習動機並說明紀錄方式。 <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;">  <div style="writing-mode: vertical-rl; font-size: 2em; opacity: 0.5; font-weight: bold;">觀察 操作</div> </div>			■找元素 三角形、邊、內角 ■找關係 邊長等或不等及相等的數量、銳角數量、直角數量、鈍角數量																	
(1)提問：哪些是正三角形？哪些是等腰三角形？哪些是不等邊三角形？ 在每個三角形旁邊，把正三角形記「A」、等腰三角形記「B」、不等長三角形記「C」。 (2)提問：哪些三角形是直角三角形？哪些是鈍角三角形？哪些是銳角三角形？ 在每個三角形旁邊，是直角三角形記「直」，是鈍角三角形記																				

「鈍」，是銳角三角形記「銳」

2、小組根據(1)和(2)的結果紀錄，在表1的空白處擺入符合條件的三角形圖卡：

以邊分類三角形 \ 以角分類三角形	正三角形(A)	等腰三角形(B)	不等邊三角形(C)
直角三角形			
鈍角三角形			
銳角三角形			

3、教師檢核小組操作的結果

4、教師提問，學生回答

「你發現什麼？」

「是否有空格？是那些空格？為什麼會有空格？」

「數數看，有三角形圖卡共有幾格？同一個格子的二個三角形有什麼共同特徵？」

5、教師引導，請小組同學討論並為7種三角形命名

我們把有**共同特徵**的三角形放在相同的格子內，共有

**7種三角形**，根據每種三角形的共同特徵請小組幫它們取個名字

6、小組實作並分享

7、教師請學生根據表1的7種三角形，每種三角形分別用扣條先做出一個三角形。

8、教師歸納：

用邊和角來分類三角形，可以分成7種三角形。

觀察  
操作

啟思

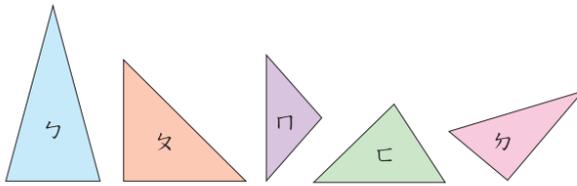
歸納或形  
成結論

■建系統：7種  
三角形類型

(一)與教科書內容比較說明：

- 教科書出現了邊角交集的其中一類：等腰直角三角形。本活動設計可以取代等腰直角三角形的學習內容，改以邊角交集雙重分類來學習。
- 邊角交集雙重分類：以邊可以分成三類，以角也可以分成三類，理當可以分成9類，實際只有7類，並沒有直角和鈍角的等邊三角形。因此需要透過提問，引發學生思考，論述/確認那兩類沒有。
- 改編康軒版四上教科書情境：14個三角形，每一類有兩個例子。分類做完後，學生可以用扣條做出同類的三角形，等於每一類會產生第三個例子。
- 比對等邊、直角、銳角和鈍角三角形類型，先直觀判斷，無法判斷時，可用測量工具比對。

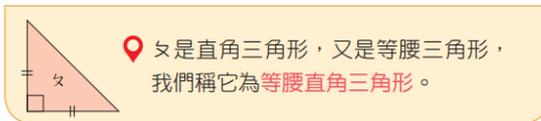
3 下面三角形中，哪些是等腰三角形？哪些是直角三角形？



1、2、3 是等腰三角形。



2 和 5 是直角三角形。



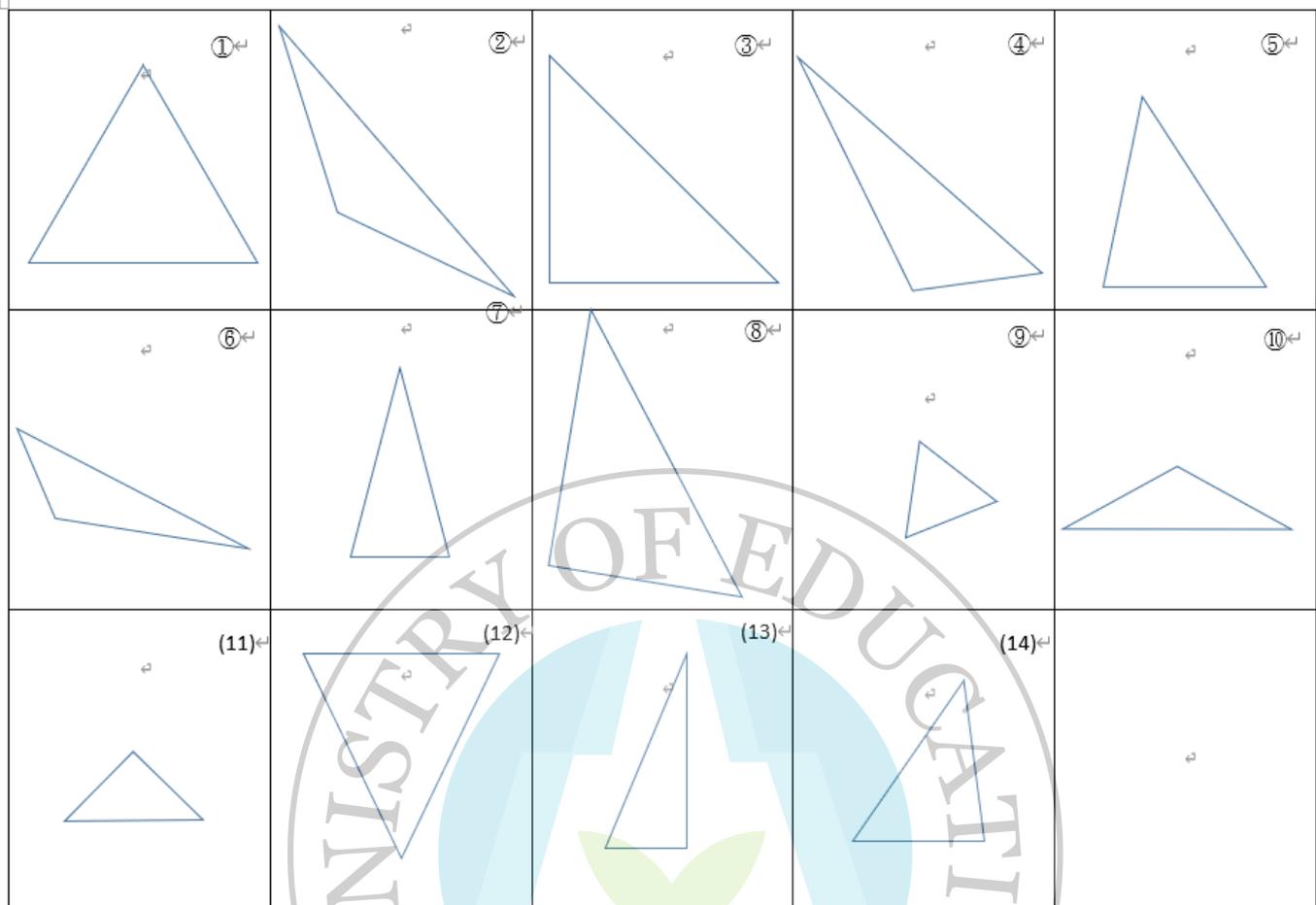
## (二)教學說明：

1. 題(1)(2)是學生已學過的邊和角分類，直接應用，作為複習，題(3)整合前兩個個別用邊和角的分類結果(記錄)，設計一個二維表格，引導看到七種交集類型。

以邊分類三角形 \ 以角分類三角形	正三角形(A)	等腰三角形(B)	不等邊三角形(C)
直角三角形		3、11	8、13
鈍角三角形		2、10	4、6
銳角三角形	1、9	7、12	5、14

2. 理論上以邊可以分成三類，以角也可以分成三類，因此，應該可以分成9類，實際只有7類，沒有直角和鈍角的等邊三角形，所以，需要透過提問，引發學生思考，論述/確認那兩個空格為什麼沒有。
3. 讓學生用扣條做出7種類的三角形，等於每一類會產生第三個例子。用扣條做出三角形，教學實驗結果，製作直角三角形時，學生會先組出垂直兩邊，再找合適的第三邊(斜邊)，由於沒學過畢氏定理，所以，可能會花一些時間。
4. 7種三角形的命名，其實就是想了解學生是否會以邊角並用來命名，教科書出現命名是等腰直角三角形，其實，如果以邊角並用命名，其他的6種三角形，還是可以稱等腰銳角、等腰鈍角、不等邊銳角、不等邊直角、不等邊鈍角和等邊銳角三角形。

下圖有 14 個三角形，看圖回答問題：



(1) 哪些是正三角形？哪些是等腰三角形？哪些是不等邊三角形？

在每個三角形旁邊，把正三角形記「A」、只有等腰三角形記「B」、不等邊三角形記「C」。

(2) 哪些三角形是直角三角形？哪些是鈍角三角形？哪些是銳角三角形？

在每個三角形旁邊，是直角三角形記「直」，是鈍角三角形記「鈍」，是銳角三角形記「銳」

(3) 根據題(1)和(2)的結果紀錄，在表 1 的空白處填入符合條件的三角形編號：

表 1

以邊分類三角形	正三角形(A)	等腰三角形(B)	不等邊三角形(C)
以角分類 三角形			
直角三角形			
鈍角三角形			
銳角三角形			

## 「三角形系統分類的系統思維」影片逐字稿

編號	時間	發言者	內容
<b>微型活動一：建立各種三角形邊的關係、角的關係</b>			
1	[00:00:15.43]	老師	你們有沒有學過三角形？
2	[00:00:16.84]	小朋友	有。
3	[00:00:17.90]	老師	那這是一個三角形嗎？
4	[00:00:19.62]	小朋友	是。
5	[00:00:21.02]	老師	你怎麼知道？知道舉手。
6	[00:00:22.84]	小朋友	因為它有三個邊、三個頂點。
7	[00:00:26.83]	老師	還有嗎？
8	[00:00:27.69]	小朋友	它還有三個角。
9	[00:00:28.84]	老師	好，那你要不要來指指看，來，三個邊在哪裡，來。
10	[00:00:35.27]	小朋友	這三個。
11	[00:00:36.48]	老師	好，再來。
12	[00:00:38.14]	小朋友	然後三個頂點。
13	[00:00:40.31]	老師	再來。
14	[00:00:40.53]	小朋友	三個角在這裡。
15	[00:00:42.34]	老師	好。這是不是你們以前學過三角形？
16	[00:00:45.33]	小朋友	對。
17	[00:00:46.38]	老師	好，今天呢，我們要來從你們學過的三角形裡面發現更多三角形的秘密，等一下呢，我們小組呢，先用扣條做出三角形 △、△、□。
18	[00:01:08.07]	老師	這一個是三角形什麼？
19	[00:01:09.63]	小朋友	△
20	[00:01:10.65]	老師	△，對，大家一起觀察看看，三角形△的三條邊，你發現什麼？然後你怎麼知道的，來，小組開始觀察。
21	[00:01:23.98]	小朋友	一樣長。
22	[00:01:30.68]	小朋友	14.5。
23	[00:01:33.17]	小朋友	對，14.5。
24	[00:01:35.77]	小朋友	阿另外一邊呢？
25	[00:01:36.65]	老師	你怎麼知道三角邊一樣長？
26	[00:01:38.91]	小朋友	你看這樣。
27	[00:01:44.35]	小朋友	它的三條邊都一樣長。
28	[00:01:45.58]	老師	你怎麼知道三條邊一樣長？
29	[00:01:48.00]	小朋友	因為它是用三個同樣的.....扣條做的。
30	[00:01:52.95]	老師	三個同樣的扣條做的，觀察三角形△的三個角，你的發現，然後你怎麼知道的。來，小組討論。
31	[00:02:05.16]	小朋友	它是角，不是直角。
32	[00:02:07.04]	小朋友	都一樣大。
33	[00:02:07.99]	老師	你怎麼知道一樣大？你怎麼比的？
34	[00:02:11.30]	小朋友	就再拼一個，然後比上去。
35	[00:02:13.62]	小朋友	三個角都一樣寬。
36	[00:02:15.34]	老師	那你怎麼發現的？
37	[00:02:16.87]	小朋友	用看的。
38	[00:02:18.42]	小朋友	就是我們先看這個角，然後就拿出三角板拿來對，然後發現這個角都是一樣大的。
39	[00:02:27.70]	老師	好，那你可不可以對一次給我看。第一個，第二個，第三

40	[00:02:39.14]	小朋友	就是把這個的一個角比這一個，這個角和它一樣大，然後再比另外一個，這個這個角也和它一樣大，那再比另外一個角也一樣大。
41	[00:02:53.78]	老師	小組，請你去觀察一下，這三角形 $\triangle$ 的三條邊跟三個角，你有什麼發現。
42	[00:03:05.51]	小朋友	像銳角。
43	[00:03:11.35]	小朋友	它就可以這樣子，它比較長一點。
44	[00:03:13.70]	小朋友	就是把它全部疊在一起，這是一樣長的，然後這是不一樣長的，然後這也是不一樣長，你就說這樣。
45	[00:03:20.78]	小朋友	就是這兩條黃色的邊一樣長，這條藍色的邊比較長。
46	[00:03:25.63]	小朋友	就是這兩個是一樣.....一樣大。
47	[00:03:30.01]	老師	這兩個角一樣大。三角形 $\triangle$ 的三條邊，你有什麼發現？
48	[00:03:34.80]	小朋友	橘色的邊最短，綠的邊中間，藍色的邊最長，都沒有一樣
49	[00:03:45.36]	老師	幾條邊沒有一樣長？
50	[00:03:46.79]	小朋友	三條邊。
51	[00:03:47.81]	老師	觀察這個三角形 $\triangle$ 的三個角，然後提出你的發現。
52	[00:03:52.59]	小朋友	角1是最小的，角2是最大的，角3是.....中間的。
53	[00:04:02.31]	老師	所以三個角？
54	[00:04:04.48]	小朋友	都是不一樣大的。
55	[00:04:06.28]	老師	這個是我們這一堂課的發現，我們先休息一下。

### 微型活動二：三角形分類：用邊（角）的特徵分類與命名

56	[00:04:17.19]	老師	請你觀察這六個三角形的三條邊，把共同特徵的歸一種，六個三角形，你可以分成幾種？每一種一樣的地方，你要告訴我它們到底哪裡一樣。第三個，你們把同一種的三角形，幫我給它取一個名字。
57	[00:04:42.09]	小朋友	不一樣長沒關係，只要有一種同樣的特徵就可以。
58	[00:04:46.08]	小朋友	像這樣呢？
59	[00:04:48.49]	小朋友	這樣沒有一樣。
60	[00:04:50.03]	小朋友	這樣又沒有一樣。
61	[00:04:51.50]	小朋友	這樣就沒有一樣。
62	[00:04:52.86]	小朋友	對呀。
63	[00:04:54.10]	小朋友	這樣呢？
64	[00:04:55.85]	小朋友	更沒有一樣。
65	[00:04:57.11]	小朋友	對。
66	[00:04:57.36]	小朋友	這邊這兩個一樣.....。
67	[00:04:59.28]	小朋友	不是。
68	[00:05:00.15]	小朋友	沒有，它是在這裡的。
69	[00:05:02.06]	小朋友	因為這兩個一樣，然後這兩個一樣，之後一個這樣子，然後這個就是三個不一樣，這個是三個不一樣，然後這個都一樣，所以分成三樣。
70	[00:05:12.38]	小朋友	三種。
71	[00:05:14.78]	小朋友	好了，寫完了。
72	[00:05:16.09]	小朋友	兩邊一樣長三角形。
73	[00:05:18.61]	小朋友	你確定嗎？
74	[00:05:20.26]	小朋友	你就寫呀。
75	[00:05:21.20]	小朋友	如果老師問的話，我就說你寫的。

76	[00:05:26.26]	小朋友	好了，正三角形。
77	[00:05:31.69]	小朋友	我們分成三種三角形，每條邊都一樣長，取名為同邊三角
78	[00:05:39.98]	小朋友	兩條邊一樣長，一條邊不一樣長，取名為兩邊一樣長三角
79	[00:05:50.11]	小朋友	每條邊都不一樣長，取名為不一樣長邊三角形。
80	[00:05:58.23]	小朋友	我們分成了三種三角形。
81	[00:06:02.31]	小朋友	三條邊都一樣長，取名叫正三角形。
82	[00:06:06.92]	小朋友	兩條邊一樣長，取名.....等腰三角形。
83	[00:06:13.92]	小朋友	三個邊都不一樣長，取名三角板三角形。
84	[00:06:17.58]	老師	你們為什麼要取名叫三角板三角形？
85	[00:06:19.92]	小朋友	因為很像三角板的形狀。
86	[00:06:23.03]	老師	剛剛你們是不是一樣長，對不對，三條邊一樣長，有兩條邊一樣長跟三個邊都不一樣長。課本把這個三邊都等長的三角形叫做正三角形。然後呢，有兩條邊等長的三角形叫做等腰三角形。那我們現在幫這個取名字，剛剛那一組取的是不一樣長邊的三角形。那我們了要讓它很明顯的看出是三條邊不一樣長，所以呢我們呢這邊就會特別取名字叫做不等邊三角形。如果我們現在用幾個角，我們來觀察角，幾個角一樣大，然後給它分成一種三角形，那你們小組看看，六個三角形可以分幾種，來試試看。
87	[00:07:13.06]	小朋友	這兩個一樣大。
88	[00:07:13.35]	小朋友	這個一樣大。
89	[00:07:16.42]	小朋友	欸，我就不一樣。
90	[00:07:19.39]	小朋友	我也不一樣啊。
91	[00:07:21.42]	小朋友	根本不像一組的。
92	[00:07:23.85]	小朋友	兩個合在一起，對，這兩個不一樣。
93	[00:07:27.86]	小朋友	分成三種家族。
94	[00:07:29.51]	老師	他們分成三種家族，來，第一種家族。
95	[00:07:31.82]	小朋友	角不一樣大的三角形。
96	[00:07:33.88]	老師	角不一樣大的三角形，有沒有看到角不一樣大的三角形，再來第二種家族，來。
97	[00:07:40.01]	小朋友	角都一樣大的三角形。
98	[00:07:42.99]	老師	第三種家族。
99	[00:07:45.08]	小朋友	有兩個角一樣大，一個角不同。
100	[00:07:49.53]	老師	用幾個角一樣大來分類三角形，我們可以分成是二個角都相等的，有兩個角相等的，跟三個角都不相等，也一樣是三種，剛剛我們用幾條邊等長來分三角形對不對，剛剛也有用幾個角一樣大來分三角形，你看看這兩個分類，你的發現是什麼？
101	[00:08:14.31]	小朋友	都分成三種，而且都是一樣。
102	[00:08:18.43]	小朋友	三個邊一樣長，三個角都一樣大。
103	[00:08:23.86]	老師	第二種呢？
104	[00:08:24.74]	小朋友	第二種兩個邊一樣長的，就有兩個角是一樣大。
105	[00:08:29.01]	老師	第三種呢？
106	[00:08:30.16]	小朋友	不一樣長，每一個角都會不一樣大。
107	[00:08:33.09]	老師	這個是我們今天到這裡，有沒有問題？
<b>微型活動三：三角形分類：用角的類型分類與命名</b>			
108	[00:08:42.69]	老師	我們要先複習一下你們之前學過的，那老師先給一個這個。
109	[00:08:49.61]	小朋友	是直角。
110	[00:08:50.83]	老師	是直角，好，再來，誰知道這是什麼角？

111	[00:08:56.52]	小朋友	是鈍角。
112	[00:08:57.45]	老師	請問你怎麼知道它是鈍角？
113	[00:08:59.98]	小朋友	比直角還要大一點。
114	[00:09:01.78]	老師	比直角還要大的角是鈍角對不對？
115	[00:09:04.28]	小朋友	對。
116	[00:09:04.73]	老師	再來，還有哪一個，還有哪種角老師沒有講到？
117	[00:09:09.80]	小朋友	銳角。
118	[00:09:12.27]	老師	銳角，好，你怎麼知道它是銳角？
119	[00:09:14.59]	小朋友	它比直角小。
120	[00:09:16.34]	老師	好，比直角小的是銳角對不對，好，等一下呢我們就是要觀察八個，八個三角形，每一個三角形的三個角各是什麼角。
121	[00:09:36.19]	小朋友	這麼多銳要幹嘛？
122	[00:09:38.07]	小朋友	直銳銳。
123	[00:09:39.34]	小朋友	對啊，幹嘛給那麼多銳。
124	[00:09:40.69]	小朋友	橡皮擦橡皮擦。
125	[00:09:42.18]	老師	觀察這個紀錄表，你有沒有什麼發現？
126	[00:09:47.31]	小朋友	你看一銳銳銳，七銳銳銳。
127	[00:09:51.78]	小朋友	銳銳銳。
128	[00:09:52.99]	小朋友	等一下，不是。
129	[00:09:54.43]	小朋友	這些全都是銳。
130	[00:09:56.49]	小朋友	真的耶。
131	[00:09:56.85]	小朋友	可是下面也是銳。
132	[00:09:58.49]	小朋友	上面都不一樣。就寫.....。
133	[00:10:00.19]	小朋友	下面這兩個角都有。
134	[00:10:03.51]	小朋友	等一下我看一下。
135	[00:10:05.55]	小朋友	下面全都是銳。
136	[00:10:07.24]	小朋友	我們就寫二三，角2和角3都是銳銳銳。
137	[00:10:12.13]	小朋友	至少都有兩個銳。
138	[00:10:13.63]	老師	你為什麼用至少？
139	[00:10:15.44]	小朋友	因為有的有三個。
140	[00:10:17.85]	老師	有的有三個，有的有兩個。
141	[00:10:19.76]	小朋友	兩個。
142	[00:10:20.83]	小朋友	角2和角3全部都是銳角。
143	[00:10:23.67]	小朋友	每個至少有兩個銳角。
144	[00:10:26.00]	老師	所以我們觀察每個三角形的銳角的時候，是不是都有兩個銳
145	[00:10:29.63]	小朋友	是。
146	[00:10:29.93]	老師	好，那你還有其他的發現嗎？
147	[00:10:32.63]	小朋友	還有其他發現嗎？
148	[00:10:36.71]	小朋友	沒了。
149	[00:10:37.03]	小朋友	感覺沒有了。
150	[00:10:38.83]	小朋友	銳角最多。
151	[00:10:39.99]	老師	好，銳角。
152	[00:10:40.40]	小朋友	鈍角第二多。
153	[00:10:42.06]	老師	鈍角第二多，然後。
154	[00:10:43.63]	小朋友	然後直角第三。
155	[00:10:44.53]	老師	直角比較少，ok。有沒有什麼其他發現嗎？
156	[00:10:48.55]	小朋友	有三個鈍角和兩個直角，剩下的都是銳角。
157	[00:10:53.59]	老師	你是講的是哪一個角？你觀察是哪裡？

158	[00:10:57.63]	小朋友	角1。
159	[00:10:57.92]	老師	角1這裡。
160	[00:10:58.24]	小朋友	角1有三個銳角、三個鈍角、兩個直角。
161	[00:11:02.94]	老師	我們把這個角1扣除剛剛的你們看到的角2跟角3，是銳角對不對，角1這是剩下的角，然後剩下的角你有沒有看到有銳角，也有鈍角，也有什麼？直角。我們就把這一個角1稱作是第三角，我們呢利用這八個三角形，請你把你們剛剛的發現，把同一種三角形取一個名字。
162	[00:11:31.02]	小朋友	它們都有一個鈍角，兩個銳角。
163	[00:11:34.02]	小朋友	八是什麼？
164	[00:11:35.00]	小朋友	第三角都是直角，然後八是.....直銳銳。
165	[00:11:40.33]	小朋友	欸，它們兩個是一樣類的。你知道為什麼我會發現，因為它們都有直角。
166	[00:11:46.43]	小朋友	沒錯，它們是同類的。
167	[00:11:52.70]	小朋友	共同特徵都有一個直角，取名為二銳一直三角形。只有一個鈍角、兩個銳角，取名二銳一鈍三角形，共同特徵三個角都是銳角，取名銳角三角形。
168	[00:12:12.01]	小朋友	三個角都是銳角，取名叫銳角三角形。
169	[00:12:17.09]	小朋友	第三個角都是鈍角，取名第三角都是鈍角三角形。
170	[00:12:24.31]	小朋友	第三角都是直角，取名為第三角是直角三角形。
171	[00:12:31.03]	老師	數學課本真的就像你們的發現，把這八個三角形分成了三種，課本給它們取這個名字，是因為它們是不是都有兩個銳角？
172	[00:12:41.04]	小朋友	對。
173	[00:12:41.23]	老師	然後其他的剩下來那個角，就像你們這一組講的，第三角，所以它的第三角是什麼角？直角。這一個第三角是？鈍角。這一個的第三角是？銳角，然後幫它取的名字。
<b>微型活動四：兩種三角形分類系統的整合</b>			
174	[00:12:59.59]	老師	現在呢，有14個三角形，我們找到它是哪一種三角形，如果它是正三角形的，你就在它的圖卡上記A，如果它是等腰三角形就記B，那如果它是不等三角形？
175	[00:13:16.96]	小朋友	C。
176	[00:13:17.79]	老師	好ABC，如果它今天是直角三角形的，它要記什麼？直。如果它是鈍角三角形，這樣要記什麼？
177	[00:13:28.90]	小朋友	鈍。
178	[00:13:29.01]	老師	鈍，如果是銳角三角形的記什麼？銳。
179	[00:13:40.97]	老師	接著我們開始要把這14個圖卡，要放到它們自己的家，你看到幾個空格？
180	[00:13:50.16]	小朋友	九格。
181	[00:13:51.15]	老師	對，那每一個三角形有一個符合它的家，只要符合這個條件，符合它就可以丟進來這個家。
182	[00:14:07.38]	小朋友	為什麼沒有這個？
183	[00:14:09.57]	小朋友	這兩個都沒有。
184	[00:14:11.01]	小朋友	然後沒有這兩個。
185	[00:14:12.04]	小朋友	欸兩格沒有人。
186	[00:14:14.07]	小朋友	是因為鈍角的這個跟這個不可能有。

187	[00:14:17.38]	小朋友	對啊，鈍角不可能有。
188	[00:14:19.90]	小朋友	鈍角跟銳角是.....直角有可能。
189	[00:14:23.39]	小朋友	但是這個不太可能。
190	[00:14:24.91]	老師	看著這一個，你們剛剛的結果，你有沒有什麼發現？
191	[00:14:28.51]	小朋友	直角三角形和鈍角三角形都沒有正三角形。
192	[00:14:34.48]	老師	你指的是？這一空格跟這一個空格沒有三角形放進來，你的意思是這樣嗎？那你有想過說為什麼會出現兩個空格嗎？
193	[00:14:45.57]	小朋友	因為止二角形，'它如果是鈍角的話，'它沒辦法連起來，然後如果是直角和正三角形的話，它就會變成很奇怪的.....三角形。
194	[00:15:04.00]	老師	接下來老師要小組做一件事情，既然是它們有共同的特徵，所以我有七個，就是七種三角形，取一下名字，然後你就把它名字呢直接就寫在這個格子上面。
195	[00:15:17.68]	小朋友	不等邊銳三角形。
196	[00:15:21.46]	小朋友	這樣很奇怪欸。
197	[00:15:21.97]	小朋友	那你要什麼？
198	[00:15:22.90]	小朋友	不等邊銳角三角形。
199	[00:15:25.45]	小朋友	好，不等邊銳角三角形。
200	[00:15:26.55]	小朋友	等腰銳角三角形。
201	[00:15:28.80]	小朋友	好。
202	[00:15:29.68]	小朋友	這個叫做銳B三角形好不好？
203	[00:15:31.93]	小朋友	為什麼要銳B？
204	[00:15:32.55]	小朋友	牛逼三角形。
205	[00:15:32.89]	小朋友	銳和B啊，好不好？
206	[00:15:36.16]	小朋友	不要啦。
207	[00:15:37.56]	小朋友	這是不同三角形。
208	[00:15:39.66]	老師	對啊。
209	[00:15:40.13]	小朋友	如果把它分成這樣，就變成.....然後這樣就變成一樣的了。
210	[00:15:44.93]	老師	你就這樣都是直角三角形，很好啊，如果你覺得它們都是直角三角形，你有看到嘛對不對，這樣都是直角三角形，可是這一個是什麼樣的直角三角形，這樣是一個什麼樣的直角三角形？所以如果我取銳角三角形，前面可以多加哪些字，然後就可以讓它們三個都不一樣，可是又有一樣的地方，ok嗎？有沒有感覺了，來，開始寫。你們是從哪裡看到哪裡取出來的？
211	[00:16:14.96]	小朋友	就是這上面先.....
212	[00:16:16.53]	老師	等腰。
213	[00:16:17.72]	小朋友	等腰就最前面都寫等腰，然後不等邊就是.....。
214	[00:16:21.89]	老師	寫不等邊，所以你是這樣看的。
215	[00:16:25.58]	小朋友	就再來看這裡，然後就是放在等腰的後面。
216	[00:16:31.59]	小朋友	我們是從這邊看過來這邊寫的，把直角三角形還有等腰三角形合在一起，就成直角等腰三角形。
217	[00:16:41.88]	老師	綠色這一個是用邊，幾條邊一樣長有沒有，分類三角形。粉紅色這個是用角來分類三角形，接著它們兩個可以交集在一起，會產生七種三角形。

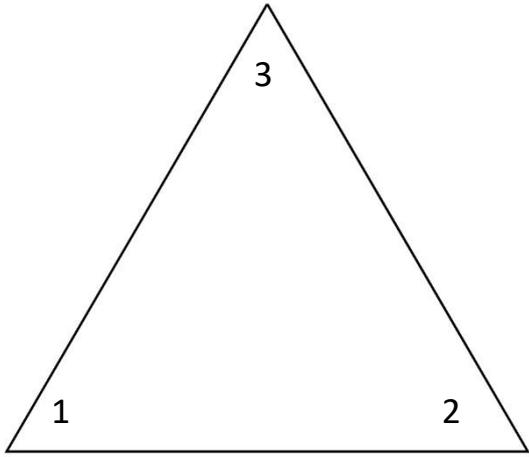
# 三角形紀錄單

觀察三角形的三個角，在表格內填入直角、銳角、鈍角

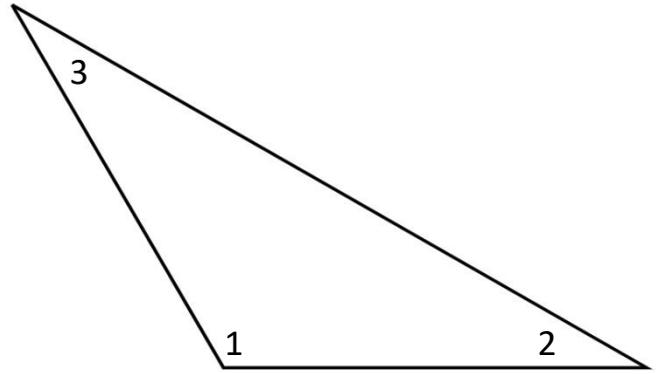
第( )組

三角形	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
角1	角	角	角	角	角	角	角	角
角2	角	角	角	角	角	角	角	角
角3	角	角	角	角	角	角	角	角

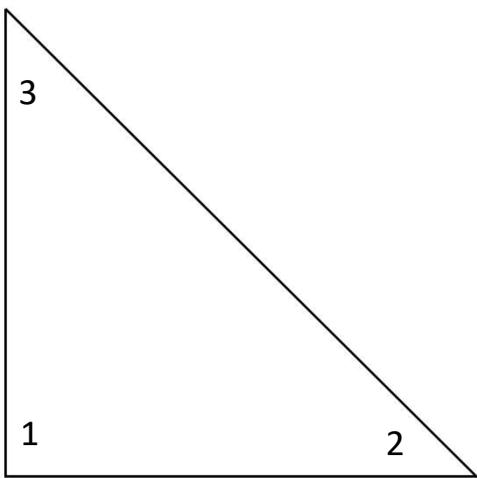
①



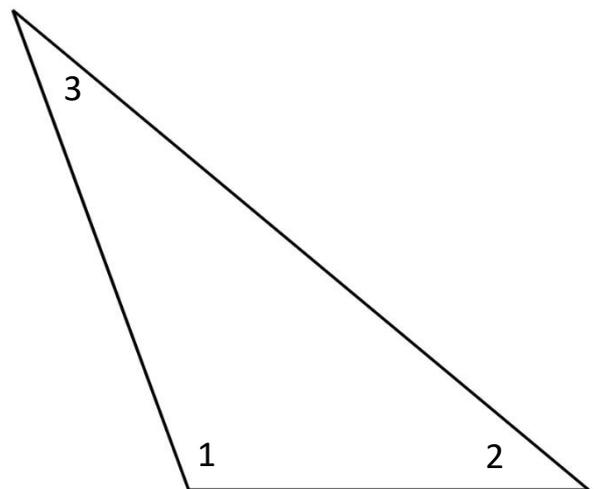
②



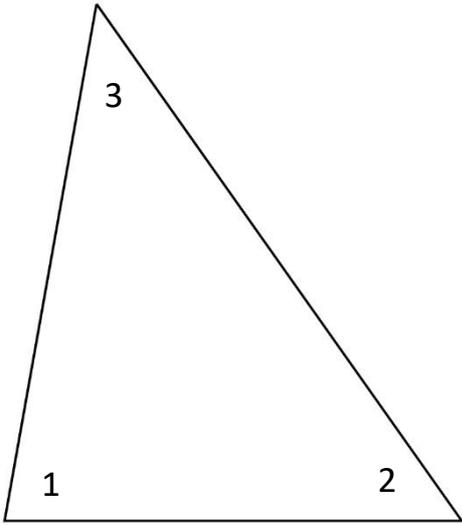
③



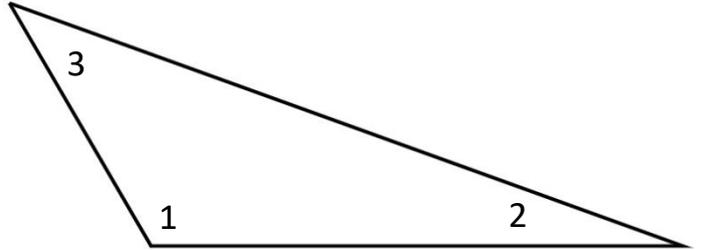
④



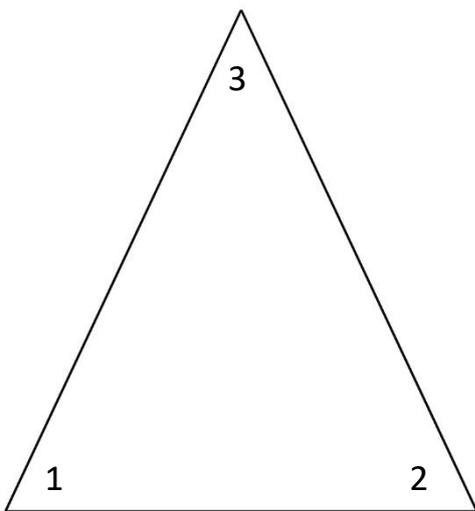
⑤



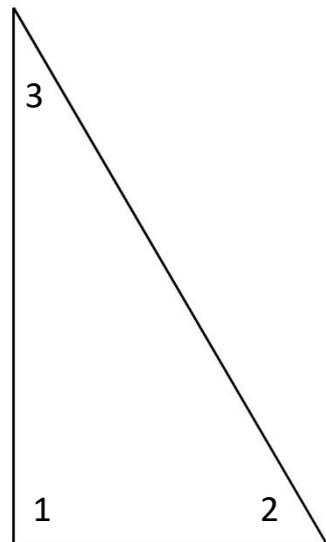
⑥



⑦



⑧



## 國 中 小 數 學 公 開 觀 課 記 錄 表

單元名稱	班級	日期與時間	教學者	觀察者
觀 察 主 軸	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">學習者</div> 甲：有趣、有感 乙：有自己的想法、有機會表達(生生共建)		二十一世紀八大思考素養： 批判性思考、研究與探究、自主堅持、資訊使用、系統性思維、溝通、 反思、創造力。	
	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">教學任務</div> 丙：診斷與共建(師生)			
教學任務			學習活動	

教學者活動	學生活動

## 國中小數學公開議課記錄表

請在橫軸中填入你在觀課過程中看見的 2 至 3 個八大思考素養，並搭配縱軸中甲、乙、丙三個面向，以事件具體描述的方式完成下列表格。

八大思考 素養 三個面向			
<b>甲：有趣、有感</b> （學習活動有趣，能引動學習思考；展現學生有感的學習。）			
<b>乙：有自己的想法、有機會表達</b> （學生主動參與，展現生生共建）			
<b>丙：診斷與共建</b> （教學任務適時介入診斷，提供師生共建機會。）			



## 《數學素養微課程：統整三角形分類促進反思思考素養》

模組名稱		統整三角形分類促進反思思考素養		設計師	張煥泉	
適用年級(主題)		四上(S)		指導教授	李源順	
數學主題		統整三角形的分類		21世紀思考素養	反思	
微型活動	影片	原教案名稱	適用課本單元	使用的三元素		
一	反思的暖身	三角形(透過角的特徵進行)命名的統整與反思 三角形(依邊和角進行)分類系統的統整與反思	辨認基本三角形和認識基本三角形的簡單性質	事件描述	詮釋了解	批判評鑑
二	反思三角形分類	三角形(透過角的特徵進行)命名的統整與反思	辨認基本三角形和認識基本三角形的簡單性質	事件描述	詮釋了解	批判評鑑
三	造例統整三角形邊與角的分類	三角形(依邊和角進行)分類系統的統整與反思	辨認基本三角形和認識基本三角形的簡單性質	事件描述	詮釋了解	批判評鑑

註：微型活動序號為影片版序號。



<https://youtu.be/tCC07f6XPY4>

## 壹、單元學習目標

S-4-7 三角形：以邊與角的特徵認識特殊三角形並能作圖。如正三角形、等腰三角形、直角三角形、銳角三角形、鈍角三角形。

## 貳、素養微課程活動設計目標與核心概念

一、數學單元或主題：四年級-三角形單元

二、課程目標與核心概念：

(一)單元目標(以南一版為例)：

- 1.辨認基本三角形和認識基本三角形的簡單性質。
- 2.繪製基本三角形。
- 3.了解平面圖形全等的意義。
- 4.能以對應點、角和邊來描述三角形的全等。

(二)素養微課程目標：

- 1.學生能使用精確的語言表達及監控自己的思考
- 2.透過反思三角形分類和命名，促進學生對三角形構成要素特徵與關係之自我性反思。
- 3.透過三角形雙重(邊和角的特徵)分類系統，促進學生對三角形性質之自我性反思。
- 3.促進教師瞭解學生自我性反思狀況。

三、21世紀素養技能：

(一)反思：(Dewey, 1933)反思是一種有目的性的思考方式，檢視過去的經驗並改善學習行為的一種過程。自我反思是見證和評估我們自己的認知、情感和行為過程的能力。

- 1.事件描述：對事件(認知、情感、行為)歷程的見證，包括整個歷程的回想描述。
- 2.詮釋了解：對事件的詮釋，概念了解。
- 3.批判評鑑：對事件的深度、多元評論與評鑑(批判鑑賞)。

(二)反思的分類：

- 1.從場域分類：社會性反思、自我性反思(李源順, 1999)
- 2.從事件(形態)分類：行動前(對行動)反思、行動中反思、行動後(對行動)反思(Schon, 1983)

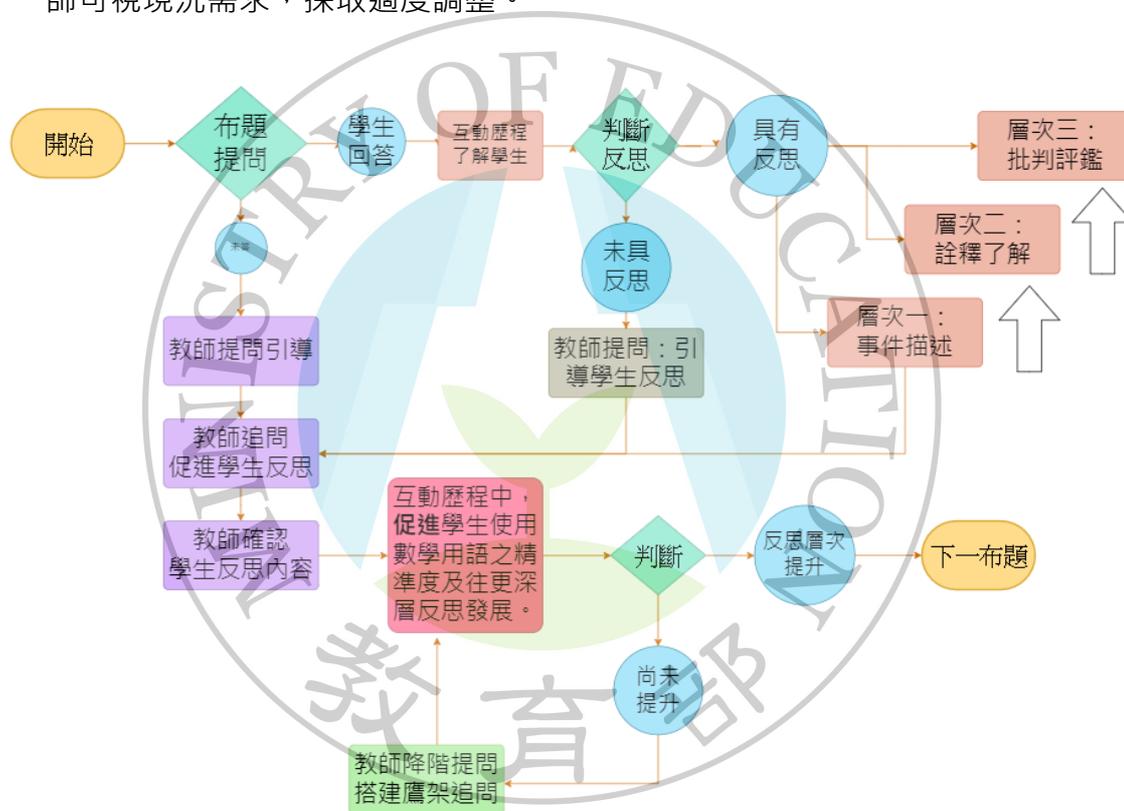
## 參、微型活動

思考技能	反思		
	事件描述	詮釋了解	批判評鑑
微活動			
三角形(透過角的特徵進行)命名的統整與反思	v	v	v
三角形(依邊和角進行)分類系統的統整與反思	v	v	V

註 1：活動流程示意圖(如下)

註 2：教師布題提問、預期學生回答、反思層次舉例、教師鷹架追問，詳見各教學互動示例。

註 3：教師與學生互動過程，可能採取的應對策略有：「初步診斷」、「確認想法」、「追問促進」或「小結綜整(教師強化重點)」等。囿於教學場域的多元和變化，教師可視現況需求，採取適度調整。



## 肆、微型活動 1：三角形(透過角的特徵進行)命名的統整與反思

### 一、適用時機與目標：

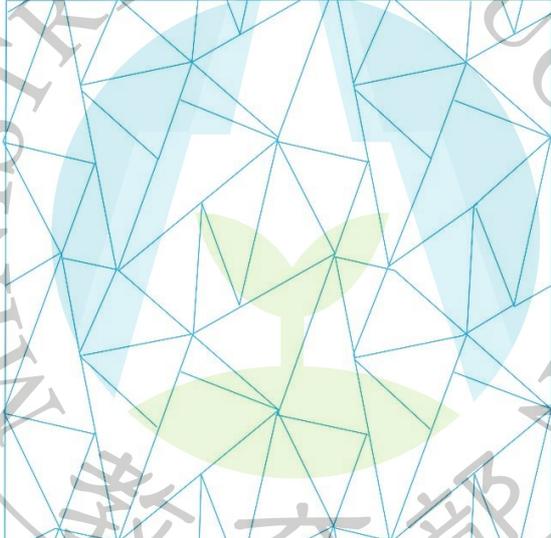
「三角形分類和命名」之教學過後或單元末，加入此統整與反思性活動，促進學生發展反思思考技能，鞏固**三角形分類命名**的教學成效。

從教師提問以及和學生間的互動，協助學生發展自我性反思外，透過確認想法、追問歷程或鷹架提問之師生互動歷程，**增進**教師對學生自我性反思的**了解**。

## 二、微型活動大綱：

教學內容	透過教師提問及追問，促進學生反思三角形透過角的特徵進行分類和命名時的歷程、判斷依據、關注特徵和構成要素間的關係，據以發揮統整學習之效。		
活動說明	1. 反思三角形分類的依據？命名有哪些？如何判斷？ 2. 反思依三角形角的特徵進行分類之歷程和結果？		
反思元素	■事件描述	■詮釋了解	■批判評鑑
學習資源	1. 教學簡報。 2. 學生學習單(歷程資料)。		

## 三、教學活動示例：

布題與引導	互動歷程	備註
<p><b>布題一/教師提問 1：</b></p> <p>T：說說看，你看到(右圖)什麼呢？</p> <p>T：有沒有要補充的？還有嗎？</p>	<p>學生聆聽與發表</p>  <p>學生可能回答 S：三角形、線、點 (對形狀外觀或圖形要素...進行描述)。</p>	<p>引起動機：引動學生察覺三角形的構成要素以及從直觀判斷三角形的特徵和名稱。</p>
<p><b>布題二/教師提問 1：</b></p> <p>T：你有回想過嗎？依據角的特徵進行命名的三角形有哪些？為什麼(可以那樣命名)？你是怎麼知道的。</p>	<p>學生聆聽與發表</p> <p>學生可能回答(例 S1~S4)：</p> <p>S1：有直角三角形、銳角三角形、鈍角三角形(、等腰直角三角形)。</p>	<p>診斷反思：了解學生的反思是事件描述或是詮釋了解。</p> <p>學生反思層次： S1：僅描述分類命名結果。(事件描述)</p>

<p>教師提問 1(續)：</p> <p>T：有沒有要補充的？</p> <p>T：還有嗎？</p>	<p>學生可能回答</p> <p>S2：三角形裡面有直角的是直角三角形、有鈍角的是鈍角三角形、都是銳角的是銳角三角形。</p> <p>S3：三個角是「直銳銳」的是直角三角形；三個角是「鈍銳銳」的是鈍角三角形；三個角是「銳銳銳」的是銳角三角形。</p> <p>S4：找出三個角中最大的那一個看：它是鈍角就稱鈍角三角形；如果是直角就稱直角三角形；如果是銳角稱做銳角三角形。</p> <p>S5：三角形的三個角裡面都有二個銳角，另外的角才是判斷時要看的。(有特徵的角，就用特徵的角，沒有的話就是銳角)</p> <p>S6：看的重點不同，但分的結果都是「直角三角形、鈍角三角形、和銳角三角形」。(看到的特徵角，就是省略二個銳角，和看第三角是差不多...)</p> <p>S7：三個角的組合情形，只會出現二個銳角加上鈍角或直角，另外就是三個銳角。找不到有二個角是「鈍+鈍；直+直；鈍+直」，所以只有這三種。</p> <p>S8：學生從直觀方式(畫圖或操作扣條)說明不可能有二個直角、二個鈍角、或一個直角加一個鈍角；更不可能出現三個直角、三個鈍角。直角和鈍角最多只能有一個。所以只有這三種。</p>	<p>教師探詢學生回應，確認反思內容/層次</p> <p>S2: 能說明分類依據(特徵角)和命名的結果(詮釋了解)</p> <p>S3: 能說明分類依據(第三角或省略共同)和命名的結果(詮釋了解)</p> <p>S4 能說明分類依據(最大角)和命名的結果(詮釋了解)</p> <p>S5: 能比較分類方法的異同，並提出詮釋。(詮釋了解)</p> <p>S6：對分類方法進行評析，並提出詮釋。(詮釋了解)</p> <p>S7: 能對三內角的既有組合結果進行評析。(詮釋了解)</p> <p>S8: 能對三內角的其他不合理組合進行直觀評析。(批判評鑑)</p>
<p>追問 1：</p> <p>T：你怎麼知道它叫做直角/鈍角/銳角三角形？</p> <p>追問 2：</p> <p>T：還有其他可能的分</p>	<p>★若學生只回答 S1, 促進 S2-S6</p>	

類說法嗎?		
<p>追問 3 :</p> <p>T: 你相信三角形從角來分類只有這三種嗎? (直角/鈍角/銳角三角形)</p>	<p>★若學生只回答 S1-S6, 促進 S7-S8 的回答</p>	
<p>追問 4* :</p> <p>T: 你怎麼知道三角形三內角和是 180 度? 你確定嗎?</p> <p>T: 這些三角形的內角和都是 180 度嗎?</p> <p>T: 因為有些同學沒有學到, 我們就不要用以後會學到的來回答, 況且你還不是很確定</p>	<p>S*: 因為三角形三內角和是 180 度...</p> 	<p>*有學生提到使用未來學習的內容回答問題, 老師再處理</p>
<p>★教師強化重點</p> <p>T: 很好, 以後在回想角的分類時, 最好像某某 X X 能想到為什麼叫做直/銳/鈍角三角形, 像 X X 回想為什麼只有這三種, 不可能有其他分類的理由。</p> <p>T: 你覺得這樣的回想是不是更好, 是不是可以把數學學得更好、更有趣?</p>	<p>學生聆聽</p>	

~微型活動 1 結束~

註 1: 若學生僅描述學習歷程中習得之分類命名後之名稱, 尚屬「事件描述」層次;

註 2: 若學生能說明分類命名的理由, 並以第三角、特徵角或最大角進行詮釋說明, 此時

已達「詮釋理解」；

註 3：若學生針對不同命名依據進行評析或發現其間的關係，此時已達「批判評鑑」。

## 伍、微型活動 2：三角形(依邊和角進行)分類系統的統整與反思

### 一、適用時機與目標：

「三角形分類和命名」之教學過後或單元末，加入此統整與反思性活動，促進學生發展反思思考技能，鞏固**三角形分類命名**的教學成效。

從教師提問以及和學生間的互動，協助學生發展自我性反思外，透過確認想法、追問歷程或鷹架提問之師生互動歷程，**增進**教師對學生自我性反思的了解。

### 二、微型活動大綱

教學內容	透過教師提問及追問，促進學生反思三角形依邊、角、邊和角來分類命名，以及雙重特徵系統分類(邊和角的特徵交集)，形成三角形的存在可能性和理由。		
活動說明	1.三角形的組成要素是邊和角, 探討可以從邊、角、邊和角來分類命名。 2.反思「雙重特徵」系統分類之正例和不存在。		
反思元素	■事件描述	■詮釋了解	■批判評鑑
學習資源	1.教學簡報。 2.小組學習單、個人學習單之歷程檔案。		

### 三、教學活動示例：

布題與引導	互動歷程	備註
<b>布題一/教師提問 1：</b> T：右圖的三角形，怎麼稱呼它？它有哪些特徵？是依據邊、角還是邊和角？ T：有沒有要補充的？還有嗎？	<b>學生聆聽與發表</b>  學生可能回答 S：正三角形(、銳角三角形)； 三條邊等長、三個銳角、三個角相等...； 依據邊、依據角、依據邊和角(對名稱、特徵、依據進行描述)。	引起動機：引動學生察覺三角形分類時的特徵和依據。  ◎若學生不熟悉從表徵辨識分類之名稱與依據特徵關係。另揭示(等腰直角)三角板，重複前述提問。
<b>布題二/教師提問 1：</b> T：你有回想過嗎？三角形有哪些類型？	<b>學生聆聽與發表</b> 學生可能回答(例 S1~S8)： S1：正三角形、等腰三角形、不等邊三角	診斷反思：了解學生的反思是事件描述或是詮釋了解。

<p>是依據什麼特徵進行分類？你怎麼知道的。</p>	<p>形是依有幾條邊等長進行分類。          銳角三角形、鈍角三角形、直角三角形是依角的特徵分類。          等腰直角三角形是依邊和角的特徵分類。</p> <p>S2：我們上課將一些圖形，找出特徵後放在符合系統分類表(如後)，並在欄位上打勾(共有7處)。</p> <table border="1" data-bbox="564 517 1007 712"> <thead> <tr> <th>邊的特徵 \ 角的特徵</th> <th>正▲ 三條邊等長</th> <th>等腰▲ 只有兩條邊等長</th> <th>不等邊▲ 三條邊不等長</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>銳角三角形</td> <td>✓</td> <td>✓</td> <td>✓</td> </tr> <tr> <td>直角三角形</td> <td>×</td> <td>✓</td> <td>✓</td> </tr> <tr> <td>鈍角三角形</td> <td>×</td> <td>✓</td> <td>✓</td> </tr> </tbody> </table>	邊的特徵 \ 角的特徵	正▲ 三條邊等長	等腰▲ 只有兩條邊等長	不等邊▲ 三條邊不等長	銳角三角形	✓	✓	✓	直角三角形	×	✓	✓	鈍角三角形	×	✓	✓	<p><b>學生反思層次：</b></p> <p>S1：描述學習過的各種分類結果和依據。(事件描述)</p> <p>S2：描述學習經歷的勾選系統分類表格之結果。(事件描述)</p>
邊的特徵 \ 角的特徵	正▲ 三條邊等長	等腰▲ 只有兩條邊等長	不等邊▲ 三條邊不等長															
銳角三角形	✓	✓	✓															
直角三角形	×	✓	✓															
鈍角三角形	×	✓	✓															
<p><b>教師提問 1(續)：</b></p> <p><b>T：指定二種(邊和角)特徵，就可以找到符合的三角形嗎？你怎麼知道的。</b>          (例 1：邊的特徵是三條邊一樣長；角的特徵是銳角三角形，有這樣的三角形嗎？)          (例 2：邊的特徵是二條邊一樣長；角的特徵是直角三角形，有這樣的三角形嗎？)</p> <p><b>T：有沒有要補充的？還有嗎？</b></p>	<p><b>*學生可能回答</b></p> <p>S3：先找很多銳角三角形後，我發現可能會有正三角形、等腰三角形、不等邊三角形(透過操作扣條或畫圖舉例)。</p> <p>S4：先找很多直角三角形後，我發現裡面會有等腰三角形、不等邊三角形，但找不到正三角形(透過操作扣條或畫圖舉例)。</p> <p>S5：先找很多鈍角三角形後，我發現裡面會有等腰三角形、不等邊三角形，但找不出正三角形(透過操作扣條或畫圖舉例)。</p> <p>S6：先找很多三條邊等長的正三角形，形狀可能不一樣大，但三個角都是 60 度，一樣大，它們都是銳角三角形(沒有直角/鈍角三角形)。(透過操作扣條或畫圖舉例)。</p> <p>S7：先找很多二條邊等長的等腰三角形，我發現它們三種(直角/銳角/鈍角)三角形都有。(透過操作扣條或畫圖舉例)。</p> <p>S8：先找出很多三條不等長的不等邊三角形，我發現它們三種(直角/銳角/鈍角)三角形都有。(透過操作扣條或畫圖舉例)。</p>	<p>教師探詢學生回應，確認反思內容/層次</p> <p>S3 -S5：透過分類再分類(先角後邊)的方法，直觀推理對分類系統上舉出可能例。(詮釋了解)</p> <p>S4 -S8：透過分類再分類(先邊後角)的方法，直觀推理對分類系先上舉出可能例。(詮釋了解)</p>																

<p><b>追問 1:</b></p> <p><b>T：指定二種(邊和角)特徵，在哪種(組合)情形，會找不到符合的三角形？為什麼？(小組討論)</b></p> <p><b>T：哪一組要分享你們的看法？(邀請分享)</b></p> <p><b>T：還有嗎？</b></p>	<p>若有學生僅(類似) S3-S8 的描述說法目的提升到 SS1- SS8 的學生描述</p> <p><b>小組討論和發表</b></p> <p><b>小組可能回答 (例 SS1~SS8)：</b></p> <p>SS1：正三角形與直角三角形的組合；正三角形與鈍角三角形的組合 透過表徵的操作，展示和說明不可能存在的二種情形：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1.符合三條邊一樣長的三角形，它不會出現直角的特徵。</li> <li>2.符合三條邊一樣長的三角形，它不會出現鈍角的特徵。</li> </ol> <p>SS2：直角三角形與正三角形的組合；鈍角三角形與正三角形的組合。 透過表徵的操作，展示和說明不可能存在的二種情形：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>3.符合直角三角形，又是三條邊等長的三角形。</li> <li>4.符合鈍角三角形，又是三條邊等長的三角形。</li> </ol> <p>SS3：正三角形和直角三角形的組合；三邊等長的三角形，它的形狀固定，三個角也被固定，而且都是銳角(60度)。這個時候，不管邊長如何改變，也都是同樣情況，所以會找不到三邊等長，又還要符合有「直角」的三角形。</p> <p>SS4：正三角形和鈍角三角形的組合；三邊等長的三角形，它的形狀固定，三個角也被固定，而且都是銳角(60度)。這個時候，不管邊長如何改變，也都是同樣情況，所以會找不到三邊等長，又還要符合有「鈍角」的三角形。</p> <p>SS5：直角三角形和正三角形的組合；已經有一個直角，作第二個直角時，</p>	<p>透過小組討論促進生生互動，提升反思層次。</p> <p><b>學生反思層次：</b></p> <p>SS1：分析三角形構成要素間的關係，能舉例演示，符合邊的特徵時，不可能出現符合角的哪一項特徵的三角形。(批判評鑑)</p> <p>SS2：分析三角形構成要素間的關係，能舉例演示，符合角的特徵時，不可能出現符合邊的哪一項特徵的三角形。(批判評鑑)</p> <p>SS3: 分析三角形的特性，說明正三角形三邊長固定後，形狀和角度被固定，不可能出再出現有「直角」的三角形。(批判評鑑)</p> <p>SS4: 分析三角形的特性，說明正三角形三邊長固定後，形狀和角度被固定，不可能出再出現有「鈍角」的三角形。(批判評鑑)</p> <p>SS5：分析三角形的性質(未來-內角和 180度)，說明直角三角形</p>
---	---	--

	<p>二條邊無法碰在一起(形成三角形)·不可能有二個直角·也就不會有三個直角的三角形(·不然會做出四邊形)。</p> <p>SS6：鈍角三角形和正三角形的組合；已經有一個鈍角·作第二個鈍角時·二條邊已開口向外無法碰在一起(形成三角形)·不可能有二個鈍角·也就不會有三個鈍角的三角形。</p> <p>SS7：直角三角形和正三角形的組合；已經有一個直角·而直角對面的邊長會比其他二條邊長·無法作出三條邊等長的三正角形。</p> <p>SS8：鈍角三角形和正三角形的組合；已經有一個鈍角·而鈍角對面的邊長會比其他二條邊長·無法作出三條邊等長的三正角形。</p> <p>★若學生無法清楚描述 SS1-SS8 的說明·老師可簡要重述。</p>	<p>不可能滿足正三角形出現相同的第二、三個直角。(批判評鑑)</p> <p>SS6：分析三角形的性質(未來-內角和 180 度)·說明鈍角三角形不可能滿足正三角形出現相同的第二、三個直角。(批判評鑑)</p> <p>SS7：分析三角形的性質(未來-大角對大邊)·說明直角三角形不可能滿足正三角形的三邊長相等。(批判評鑑)</p> <p>SS8：分析三角形的性質(未來-大角對大邊)·說明鈍角三角形不可能滿足正三角形的三邊長相等。(批判評鑑)</p>
<p>★教師強化重點</p> <p>T: 很好。以後在回想三角形系統分類時·最好像某某 X X 能想到為什麼有些特徵能一起出現；有些是不能的而且把原因也解釋的很好。以後·會學到更多的解釋方法喔！</p>	<p>學生聆聽</p>	

~微型活動 2 結束~

註 1：若學生僅描述學習分類的結果或歷程經驗，尚屬「事件描述」層次；

註 2：若學生能舉例或以直觀推理說明同時對邊和角進行系統分類時的可能例，達「詮釋理解」；

---

註 3：若學生能以構成要素間的關係或性質，對三角形進行評析和說明(不存在)原因，此時已達「批判評鑑」。

**單元課後反思活動：**

教師提問 1：今天的上課討論內容，誰來幫忙做一個整合或總結呢？

(學生自由發表)

教師提問 2：這個單元在學習之前和現在(學過後)，你覺得有何不同？用形容詞說說你的感受(學生自由發表)



## 「統整三角形分類促進反思思考素養」影片逐字稿

編號	時間	發言者	內容
<b>微型活動一：反思的暖身</b>			
1	[00:00:15.55]	老師	說說看，左圖你看到了什麼？
2	[00:00:21.45]	小朋友	看到三角形。
3	[00:00:23.84]	小朋友	我看到有大大小小的三角形。
4	[00:00:28.04]	小朋友	我看到正三角形、等腰三角形和不等邊三角形。
5	[00:00:32.11]	小朋友	我看到很多不同三角形組成的正方形。
6	[00:00:36.73]	老師	看到很多不同三角形組成的正方形。
7	[00:00:41.24]	小朋友	正方形。
8	[00:00:44.00]	小朋友	他說這個圖片。
9	[00:00:45.19]	老師	他說這個圖片，你幫他說明是這一個圖片是一個正方形，你的意思是這樣子嗎？哦好，等一下我會給你一張學習任務單，第一個任務是把那一張紙上，去標示你找到的三角形。第二，要請同學把三角形的名稱寫下來，因為剛剛你說看到什麼三角形嘛，然後再來比較難一點點的哦，你怎麼知道那個是你講的三角形啊。你到底是怎樣子看出來的，你可不可以說說看，說說看的話，要說給誰聽？
10	[00:01:28.30]	小朋友	大家聽。
11	[00:01:30.03]	老師	沒有，只要說給旁邊的聽就子了。
12	[00:01:34.33]	小朋友	欸你畫正三角形。
13	[00:01:35.41]	小朋友	好。
14	[00:01:40.73]	小朋友	三。
15	[00:01:44.25]	小朋友	這兩條一樣，然後這一條不一樣。
16	[00:01:47.47]	老師	這一條不一樣。
17	[00:01:50.86]	小朋友	你的八很明顯就是正的，來，你這裡寫正。
18	[00:01:56.27]	老師	左邊的三角形，你會怎麼來稱呼它？它一定有名字對不對，那有什麼特徵呢？然後它是依據邊，還是角，還是邊和角呢，你會給它怎樣一個名稱？
19	[00:02:13.25]	小朋友	它是銳角三角形。
20	[00:02:15.31]	老師	這裡是銳角三角形，它的特徵是？
21	[00:02:20.61]	小朋友	大小不同。
22	[00:02:21.60]	老師	大小不同，好，我只有給你一個的話，它的特徵是什麼？
23	[00:02:26.23]	小朋友	三個邊都一樣長。
24	[00:02:27.89]	老師	所以你是依據邊嗎？
25	[00:02:31.95]	小朋友	正三角形。
26	[00:02:32.65]	老師	它是正三角形，特徵。
27	[00:02:36.22]	小朋友	三個角都是銳角，三個邊都一樣長。
28	[00:02:39.45]	老師	三個角都是銳角，三個邊都一樣長，所以你是依據？
29	[00:02:44.94]	小朋友	邊和角。
30	[00:02:46.13]	老師	剛剛的三角形，它是有兩個特徵，有邊跟角。那我現在換另外一個問你囉，來，這一個。
31	[00:02:54.80]	小朋友	直角三角形。
32	[00:02:55.99]	老師	它是直角三角形，有什麼特徵？
33	[00:02:59.09]	小朋友	它有一個直角、兩個銳角。
34	[00:03:00.95]	老師	它有一個直角和兩個銳角，然後你是依照？

35	[00:03:05.16]	小朋友	角。
36	[00:03:05.94]	小朋友	等腰三角形。
37	[00:03:07.45]	老師	它是一個等腰三角形，特徵。
38	[00:03:10.42]	小朋友	兩個邊一樣長，一個邊不一樣長。
39	[00:03:13.32]	老師	它有兩個邊一樣長，你講的邊是指？下來，那是一條線跟那一條線，所以你是依據？
40	[00:03:22.02]	小朋友	邊。
41	[00:03:23.33]	小朋友	邊都兩個一樣長，然後一個不一樣長，角則是有一個直角，然後兩個銳角，所以叫做直角三角形。然後邊的話就是等腰三角形，我是依據邊和角看出來的。
42	[00:03:46.12]	老師	依照邊和角的時候，可以看到等腰，也可以看到直角，所以它的名稱，怎麼稱呼它？
43	[00:03:55.45]	小朋友	等腰直角三角形。
44	[00:03:57.82]	老師	等腰直角三角形。

### 微型活動二：反思三角形分類

45	[00:04:05.41]	老師	你有回想過嗎？到底三角形你學過的類型，或是可能有的類型，如果我們依據特徵來分的話，是用什麼特徵來分的？
46	[00:04:17.98]	小朋友	直角三角形、銳角三角形、鈍角三角形。
47	[00:04:22.80]	老師	那為什麼會這樣命名呢？
48	[00:04:24.70]	小朋友	依據它的寬度，然後用.....然後人去這樣子取出來的。
49	[00:04:33.92]	小朋友	就是因為直角三角形，它有一個很直的角，所以叫做直角三角形，然後銳角就是代表它有一個尖銳的角，然後鈍角是表示它有一個很寬的角。
50	[00:04:50.98]	小朋友	直角三角形是一個直角、兩個銳角，所以叫直角三角形。
51	[00:04:58.01]	老師	直角三角形對不對，好，來，再來。
52	[00:05:01.85]	小朋友	銳角三角形是三個都是銳角。
53	[00:05:05.25]	老師	是有三個銳角組成的三角形。
54	[00:05:07.98]	小朋友	鈍角三角形是一個鈍角、兩個銳角組成的三個形。
55	[00:05:13.48]	老師	所以這是一個鈍角跟兩個銳角組的三角形。你相信只有這三種的舉手。
56	[00:05:20.55]	小朋友	當然相信啊。
57	[00:05:22.47]	老師	你相信只有這三種的舉手。為什麼會相信呢？
58	[00:05:27.49]	小朋友	老師告訴我們的。
59	[00:05:28.82]	老師	因為是老師講的，所以你就相信了只有三種。
60	[00:05:32.53]	小朋友	因為三角形就只剩這些了。
61	[00:05:36.24]	老師	因為三角形就只有這幾種，所以找不到其他的。從角來做分類的時候，三角形有直角跟銳角跟鈍角，而且要知道為什麼它叫直角三角形，為什麼它叫銳角三角形或鈍角三角形，這個是很重要的。我們在學的時候，除了知道它，還要知道它為什麼。然後第二個為什麼的話，這裡有，剛剛有問大家，只有這三種嗎？不可能有其他的嗎？那這個也是，同學有時候可以去想一想，真的只有這三種嗎？有沒有可能有兩個直角的三角形？
62	[00:06:17.41]	小朋友	沒有。
63	[00:06:20.34]	老師	有沒有可能有兩個鈍角的三角形？
64	[00:06:22.47]	小朋友	沒有。
65	[00:06:25.07]	老師	所以在這邊，你們可以從一些上課提到的一些來回答老師的想法，這個是幫你們去想為什麼，用邊的時候會用什麼分法？

66	[00:06:38.72]	小朋友	有長的時候，還有有短的時候。
67	[00:06:41.75]	老師	有長的時候跟有短的，所以叫做長的三角形跟短的三角形嗎？不是，那你的意思是什麼？它都說用邊長來分。
68	[00:06:54.40]	小朋友	長邊。
69	[00:06:55.97]	老師	長邊三角形。不是嗎？
70	[00:06:59.01]	小朋友	有一樣長的，也有不一樣長。
71	[00:07:01.32]	老師	有一樣長的跟不一樣長的，所以我們要看的到底是看邊長，一樣長的是看什麼？
72	[00:07:09.04]	小朋友	假設如果有三條邊都一樣長的話，它就是正三角形。
73	[00:07:15.40]	老師	正三角形，然後呢？
74	[00:07:18.45]	小朋友	如果它是有兩條邊一樣長，只有一條邊不一樣長的話，它就叫做等腰三角形。
75	[00:07:28.03]	老師	叫等腰三角形。還有呢？
76	[00:07:31.03]	小朋友	如果三條都不一樣長的話，它就叫做不等邊三角形。
77	[00:07:37.65]	老師	這是你們學過的，用邊的，好，謝謝你。

### 微型活動三：造例統整三角形邊與角的分類

78	[00:07:46.63]	老師	剛剛同學講的這個，它的特徵，剛剛有講到三條邊一樣長，然後也有講到它是銳角三角形，它是三個角都一樣大，都是銳角，它是有兩條邊一樣長，它也看到有直角，給你兩個特徵，給你一個邊，邊那邊拿一個，角這邊拿一個，你就可以找到三角形嗎？
79	[00:08:21.68]	小朋友	可以啊。
80	[00:08:22.43]	老師	可以喔，等腰可不可以找到銳角？
81	[00:08:26.46]	小朋友	可以。
82	[00:08:28.50]	老師	可以找到鈍角嗎？
83	[00:08:29.85]	小朋友	可以。
84	[00:08:30.91]	小朋友	不行。
85	[00:08:33.36]	老師	等腰又要鈍角。那我現在.....。
86	[00:08:38.20]	小朋友	可以啦。
87	[00:08:39.34]	老師	我給同學另外一張學習單，你隨便找其中某一個，邊找一個，角找一個特徵，畫得出來的，然後我們就在這一個表格上面把它畫下來。
88	[00:09:01.04]	小朋友	鈍角銳銳，這個沒辦法，這兩個沒辦法。
89	[00:09:03.86]	老師	他要挑戰三條邊一樣長的鈍角三角形喔。
90	[00:09:08.75]	小朋友	沒有辦法吧。
91	[00:09:10.19]	老師	沒有辦法。
92	[00:09:11.34]	小朋友	沒有辦法。
93	[00:09:12.82]	小朋友	絕對沒有辦法。
94	[00:09:13.92]	老師	絕對沒有辦法。
95	[00:09:20.78]	老師	這個地方真的每一個都畫得出來嗎？
96	[00:09:23.95]	小朋友	老師就這個畫不出來。
97	[00:09:27.47]	老師	哪一個沒有畫出來啊？
98	[00:09:29.62]	小朋友	左邊最下面的。
99	[00:09:30.75]	老師	左邊最下面這個畫不出來。
100	[00:09:32.87]	小朋友	還有它上面那一個。
101	[00:09:35.25]	小朋友	左邊中間的那個。
102	[00:09:36.75]	老師	左邊中間這個畫不出來。
103	[00:09:38.59]	小朋友	對。

104	[00:09:38.76]	老師	找不到的那個原因跟找不到的，你可不可以去小組對話一下。為什麼你們會說那兩個找不到。
105	[00:09:51.12]	小朋友	老師，有啊，兩個銳角一個直角，一個直角啊，兩個銳角。
106	[00:09:54.54]	老師	要正三角形，三條邊一樣長。
107	[00:09:58.38]	小朋友	那沒辦法。
108	[00:09:59.29]	老師	為什麼沒辦法？
109	[00:10:00.21]	小朋友	欸有法啊，為什麼沒辦法？
110	[00:10:03.02]	小朋友	喔正三角形。
111	[00:10:05.14]	小朋友	正三角形，而且要兩個銳角，一個直角。
112	[00:10:09.60]	小朋友	我要先試畫一下，你尺借我一下。
113	[00:10:11.77]	小朋友	你，有人想畫。
114	[00:10:14.47]	小朋友	我來試畫一下，銳角銳角直角又是正三角形。
115	[00:10:18.36]	老師	所以你這個邊一樣長，又要月直角的話，就會畫出這樣子。然後邊一樣長，又要有鈍角，就會畫出這樣子。
116	[00:10:30.60]	小朋友	因為正三角形要三個角都是要一樣的，可是直角三角形的話，它就是一個直角兩個角，所以不行。
117	[00:10:45.28]	老師	因為正三角形要三個角一樣大，然後直角三角形的話，又要有一個直角、兩個銳角，就不可能一樣了，一樣大了，所以他是覺得說這個畫不出來，好，他的理由是這樣。
118	[00:10:59.00]	小朋友	鈍角也一樣。
119	[00:11:00.13]	老師	鈍角也是一樣，因為正三角形要三個角一樣大，三條邊一樣長，三個角一樣大，所以到鈍角三角形的時候，一個鈍角加兩個銳角，就不可能一樣大了。我也希望同學能夠再去回想一下，有些可以符合，有些會找不到，為什麼可能還有其他的理由喔。

## 國 中 小 數 學 公 開 觀 課 記 錄 表

單元名稱	班級	日期與時間	教學者	觀察者
觀察 主 軸	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">學習者</div> 甲：有趣、有感 乙：有自己的想法、有機會表達(生生共建)		二十一世紀八大思考素養： 批判性思考、研究與探究、自主堅持、資訊使用、系統性思維、溝通、 反思、創造力。	
	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">教學任務</div> 丙：診斷與共建(師生)			
教學任務			學習活動	

教學者活動	學生活動

## 國中小數學公開議課記錄表

請在橫軸中填入你在觀課過程中看見的 2 至 3 個八大思考素養，並搭配縱軸中甲、乙、丙三個面向，以事件具體描述的方式完成下列表格。

八大思考 素養 三個面向			
<b>甲：有趣、有感</b> (學習活動有趣，能引動學習思考；展現學生有感的學習。)			
<b>乙：有自己的想法、有機會表達</b> (學生主動參與，展現生生共建)			
<b>丙：診斷與共建</b> (教學任務適時介入診斷，提供師生共建機會。)			

# 《數學獨立探索數位實驗活動：當圓形遇上三角形\_九年級》

編號：\_\_\_\_\_ (由主辦單位填寫)

設計者：林柏寬、邱奕凱、黃惠禎

蕭詩媛、李旻儒

## 壹、基本資料

一、學具名稱：當圓形遇上三角形

二、學習單元：九年級三心課程之「外心」

三、先備子技能：

S-8-12 尺規作圖與幾何推理：複製已知的線段、圓、角、三角形；能以尺規作出指定的中垂線、角平分線、平行線、垂直線；能寫出幾何推理所依據的幾何性質。

四、核心子技能：

S-9-8 三角形的外心：外心的意義與外接圓；三角形的外心到三角形的三個頂點等距；直角三角形的外心即斜邊的中點。

五、後續子技能：

S-9-9 三角形的內心：內心的意義與內切圓；三角形的內心到三角形的三邊等距。

六、學具定位：奠基      精熟      延伸      科展、專題 (可複選)

七、使用模式：課前      課中      課後      其他：\_\_\_\_\_

八、學習目標：在以「尺規作圖具備中垂線知識能力」的舊經驗下，進行數學實驗探究。

活動 1：圓形城鎮藏寶圖

活動 2：通過一點的圓

活動 3：通過兩點的圓

活動 4：通過三點的圓形

活動 5：圓心在哪裡呢？

★**奠基**：適合在課前或課中使用，提供學生操作的先備經驗以奠定後續概念發展學習的基礎。

★**精熟**：適合在課中或課後使用，提供學生精熟某個已學習之概念的機遇。

★**延伸(加深加廣)**：適合在課中或課後使用，提供學生課外補充或銜接後續章節的學習機會。

## 貳、數學獨立探索數位實驗活動設計目標與核心概念

- 一、本活動目標在以「數學奠基模組\_當圓形遇上三角形」為基礎，利用尺規作圖的舊經驗，結合數位學習工具，發展可供學生獨立自主進行探索的實驗活動。教師也能將此活動融入遠距教學，透過線上指導的方式進行數學實驗探究。
- 二、以建模活動為中心，讓學生在問題解決的具體情境中，透過實驗操作、觀察記錄與問題探索等循序漸進方式進行有意義的學習。
- 三、提供機會讓學生在操作的過程中提出問題、進行臆測，並動手實驗、探索，最後根據觀察到的結果，確認或修正自己的想法。在此教學模式中，學生能從既有的數學物件上產生行動，依據實驗活動指引內化為心智中的數學過程，最後將相關概念整合成新的數學物件，持續運作這樣的循環來逐步建構自身的知識體系。

### 四、設計原則

- 1、每一個活動階段提供虛擬學具作為學生探索實驗的工具。
- 2、 每一個活動階段僅訂立一個數學概念學習目標。
- 3、 每一個活動階段由一系列可供學生具體操作的任務所組成。
- 4、 每一個任務包含實驗操作的指引、可觀察的數據或行為紀錄、引發學生反思的探索問題。

### 五、設計架構

The screenshot displays a digital learning interface with three main stages: 1. 實驗操作 (Experiment Operation), 2. 觀察記錄 (Observation Record), and 3. 問題探索 (Problem Exploration). Stage 1 shows a compass and a circle on a map background, with instructions like '圓規現在預開2.4單位長度' and '圓規顏色:'. Stage 2 contains three questions about circles centered at points A, B, and C, asking if they pass through four points. Stage 3 asks about the properties of a circle, specifically if the distance from any point on the circle to the center is the same.

以「實驗操作」、「觀察記錄」與「問題探索」為設計架構。

- 1、活動階段：依據數學獨立探索實驗活動之教學目標切割成數個小活動階段，以提供循序漸進的學習軌道。
- 2、 實驗操作：學生的具體操作步驟。
- 3、 觀察紀錄：學生可以根據操作完的畫面結果直接進行觀察、記錄。
- 4、 問題探索：學生可以根據操作、紀錄之結果思考回答的問題。

### 六、操作脚本(學習紀錄單+操作介面)

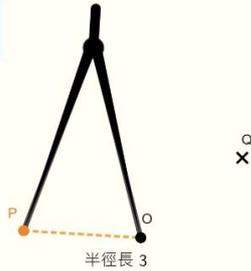
活動1：圓形城鎮藏寶圖

顯示圓規

圓規現在張開3單位長度

圓規顏色：

開始畫圓



清除軌跡

圓規工具

說明：

- 「O點」：拖曳以決定圓規圓心
- 「P點」：拖曳P點可以決定筆尖的位置
- 「開始畫圓」：勾選後可以拖曳P點畫圓
- 「顏色方塊」：點選可以改變筆跡顏色
- 「看看軌跡」：點擊後顯示以O為圓心、 $\overline{OP}$ 為半徑的圓

操作目標：

- 試著用圓規工具畫個圓形吧！
- 以Q點為圓心，半徑為4，畫一個圓形吧

操作步驟：

1. 將「O點」拖曳至「Q點」決定圓心位置
2. 拖曳「P點」將半徑選擇為4
3. 勾選「開始畫圓」後，拖曳「P點」畫一個圓



活動2：通過一點的圓

顯示圓規

目標進度：0/3



確定挖掘位置

reset

實驗操作1

實驗目標：「決定要挖掘的位置」並「標示原本的圓形城牆」

- 樓塔在原本圓形的城牆上
- 寶藏在圓形城牆的圓心

操作步驟：

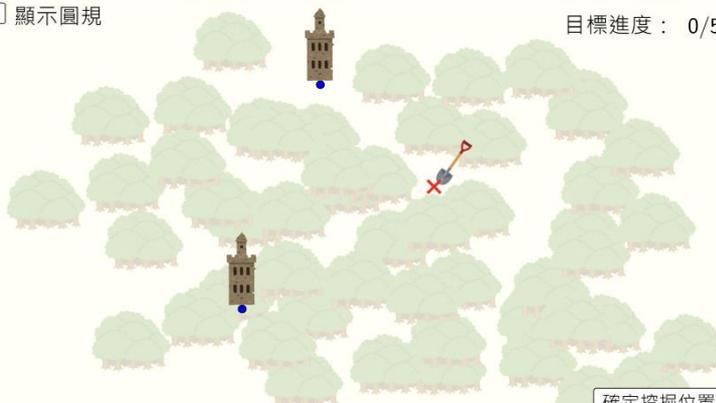
1. 拖曳「紅色叉叉」並點擊「確定挖掘位置」決定要挖掘寶藏的位置
2. 拖曳「紅點」調整圓形城牆大小讓圓周通過T點吧
3. 點擊「確定城牆遺跡」並看看有沒有挖到寶藏吧
4. 至少進行三次符合條件的挖掘吧



活動3：通過兩點的圓形

顯示圓規

目標進度：0/5



確定挖掘位置

reset

實驗操作1

實驗目標：「決定要挖掘的位置」並「標示原本的圓形城牆」

- 兩座樓塔都在原本圓形的城牆上
- 寶藏在圓形城牆的圓心

操作步驟：

1. 拖曳「紅色叉叉」並點擊「確定挖掘位置」決定要挖掘寶藏的位置
2. 拖曳「紅點」調整圓形城牆大小，讓圓周同時通過兩座樓塔吧  
圓心到兩點的距離要一樣長才有辦法同時通過兩點喔
3. 點擊「確定城牆遺跡」並看看有沒有挖到寶藏吧
4. 至少進行五次符合目標的挖掘吧



獨立探索活動 活動4：通過三點的圓形

目標進度：0/1

說明：

- 「中垂線作圖工具」：點選後可以在畫面中製作中垂線
- 「游標工具」：點選後可以恢復使用滑鼠游標

實驗目標：

- 三座樓塔都在圓形城牆上
- 寶藏在圓形城牆的圓心
- 多多利用中垂線工具找到符合目標的地點吧

操作步驟：

- 點選「中垂線作圖工具」
- 依序點擊A、B兩點作出 $AB$ 的中垂線
- 依序點擊B、C兩點作出 $BC$ 的中垂線
- 點選「游標工具」後決定挖掘的地點
- 拖曳「紅色叉叉」到兩條中垂線的交點，並調整合適的半徑使圓周通過A、B、C三點，看看會不會挖到寶藏吧！！



獨立探索活動 活動5：圓心在哪裡呢？

顯示通過A、B、C三點的圓

顯示中垂線

O點落在 $\triangle ABC$ 內部

實驗操作1

實驗目標：

- 拖動A點觀察通過三點的圓其圓心位置如何改變

操作步驟：

- 拖動A點觀察圓心的位置
- 先拖動A點讓 $\angle A > 100^\circ$ ，並觀察O點的位置
- 再拖動A點讓 $\angle B > 120^\circ$ ，並觀察O點的位置

### 活動一：圓形城鎮藏寶圖

活動目標：透過圓規的操作作為鋪陳，藉由圓形的畫法，喚起圓形相關性質的舊經驗(圓上任意點到圓心等距離、圓心到圓周上一點的距離稱之為半徑)

#### 活動階段

#### 活動畫面

#### 【圓規工具使用】

操作目標：

試著用圓規工具畫個圓形吧！

以 Q 點為圓心，畫一個半徑為 4 的圓形

操作步驟：

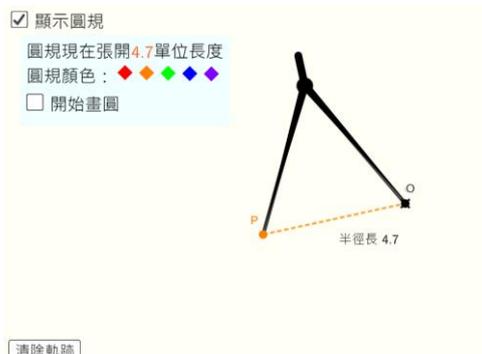
1. 將「O 點」拖曳至「Q 點」決定圓心位置
2. 拖曳「P 點」將半徑選擇為 4
3. 勾選「開始畫圓」後，  
拖曳「P 點」畫一個圓

操作小叮嚀：



如果沒有跳出完成畫面，可以試著把圓畫完整一點或是點擊「檢查目標」的按鈕。

#### 參考操作畫面



#### 參考操作完成畫面



#### 【實驗操作】

實驗目標：

在藏寶圖上以合適的圓心與半徑畫圓，畫出完整的圓形城牆

● 寶藏在圓形城牆的圓心

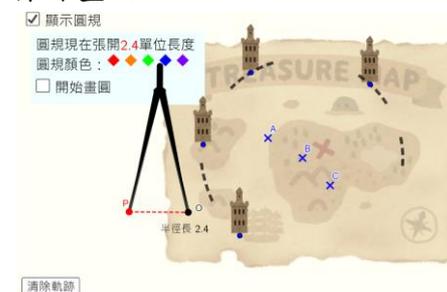
操作步驟：

1. 點擊 A、B、C 點可以設定圓規的圓心 O
2. 點擊城牆上的點可以調整圓規至合適的半徑
3. 勾選「開始畫圓」後，  
拖曳「P 點」開始畫圓

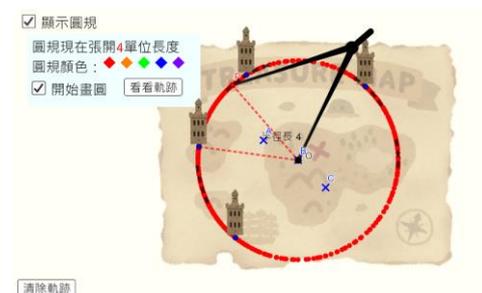
操作小叮嚀：

點擊按鈕「設定至 A 點」按鈕，  
可以設定畫面中圓規的圓心位置。  
點擊按鈕「設定半徑」按鈕，  
可以設定畫面中圓規的圓心位置。

#### 參考操作畫面



#### 參考操作完成畫面



**【觀察記錄】**

1. 以 A 點為圓心所畫的圓是否會同時經過四座塔的位置？

是  否

2. 以 B 點為圓心所畫的圓是否會同時經過四座塔的位置？

是  否

3. 以 C 點為圓心所畫的圓是否會同時經過四座塔的位置？

是  否

作答錯誤回饋：

以 A 點為圓心所畫的圓有同時通過四座塔嗎？

A 點到四座塔的距離有相同嗎？

**作答回饋範例：**



以A點為圓心所畫的圓有同時通過四座塔嗎？  
A點到四座塔的距離有相同嗎？

**【問題探索】**

關於圓形的特性，下列敘述哪些是正確？

1. 圓上的點到圓心的距離是否相同？

是  否

作答錯誤回饋：

想想看我們畫圓的時候有沒有改變圓心到圓上的距離呢？

2. 圓上一點到圓心的距離稱為什麼？

直徑  半徑

作答錯誤回饋：

圓上一點到圓心的距離稱為半徑喔！

**作答回饋範例：**



想想看我們畫圓的時候有沒有改變圓心到圓上的距離呢？



圓上一點到圓心的距離稱為半徑喔！

## 活動二：通過一點的圓

**活動目標：**以圓形的城牆與城牆上的一座樓塔作為情境，請學生畫出一個通過給定樓塔的圓形城牆，即畫出通過給定一點的圓

### 學習單內容

#### 【實驗操作】

#### 活動引言

你帶著冒險隊到了地圖上的位置，卻沒看見圓形城鎮的遺跡，只發現了一座曾經位於圓形城牆上的「樓塔」。

試著找出原本的「城鎮中心(圓心)」

與「圓形城牆位置(圓周)」，

定位出寶藏可能的位置吧

#### 實驗目標：

「決定要挖掘的位置」並

「標示原本的圓形城牆」

● 樓塔在原本圓形的城牆上

● 寶藏在圓形城牆的圓心

#### 操作步驟：

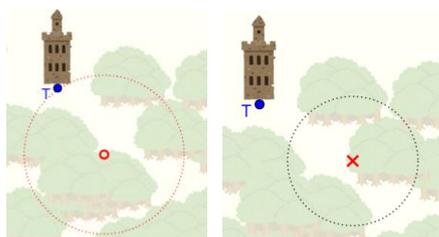
1. 拖曳「紅色叉叉」並點擊「確定挖掘位置」決定要挖掘寶藏的位置
2. 拖曳「紅點」調整圓形城牆大小讓圓周通過 T 點吧
3. 點擊「確定城牆遺跡」並看看有沒有挖到寶藏吧
4. 至少進行三次符合條件的挖掘吧

#### 操作小叮嚀：

點擊「確定挖掘位置」按鈕後，只需要拖曳圓上的點，便可以決定所畫出圓的大小。

符合條件的圓會以紅色虛線表示，

未符合條件的圓會以黑色虛線表示



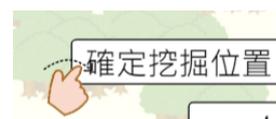
### 活動畫面

#### 參考操作畫面：

步驟一：拖曳紅色叉叉決定圓心



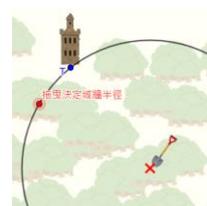
點擊按鈕確定圓心位置



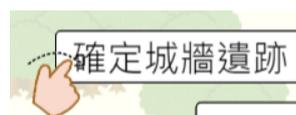
步驟二：拖曳紅點決定半徑



讓圓形通過 T 點



步驟三：點擊按鈕確定圓形軌跡



### 【觀察記錄】

- 你所畫出的符合條件的圓形城牆是否都有通過T點呢？

是  否  不一定

作答錯誤回饋：

檢查一下畫面中的紅色虛線有沒有都通過T點呢？

- 你有機會挖掘到寶藏的地點(紅色圈圈)，位置都相同嗎？

相同  不相同

作答錯誤回饋：

檢查一下畫面中的紅色圈圈位置都相同嗎？

- 你所畫出的圓形城牆的大小都相同嗎？

相同  不相同

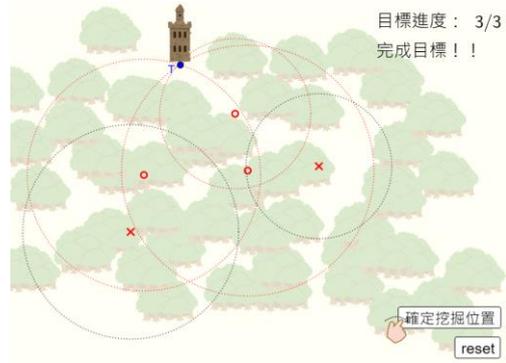
作答錯誤回饋：

檢查一下畫面中的虛線圓形大小都相同嗎？

正確答題回饋：

沒錯，我們可以畫出很多不同大小的圓都通過T點

### 參考操作完成畫面



### 作答回饋範例



### 【問題探索】

1. 你覺得通過 T 點的圓有幾個？

1 個  2 個  3 個

無限多個

作答錯誤回饋：

除了剛剛所畫的三個，我們應該還可以畫更多！

2. 只有發現一座樓塔，一定可以找到寶藏的確切地點嗎？

一定可以  不一定

3. 如果你想要更確切找到寶藏位置，你覺得需要增加哪些條件？

知道寶藏到樓塔的確切距離

知道所畫圓是否能再通過其他樓塔

再多挖幾個點，總會挖到

作答回饋：

「確切的距離」與「更多的條件」的確可以讓我們更精準地找到圓心  
當然！努力不懈也是一個好方法！

小叮嚀：

以上選項皆為正確答案，同學只要有答題選擇任意選項，皆可以前往下個活動階段

### 作答回饋範例



除了剛剛所畫的三個，我們應該還可以畫更多！



「確切的距離」與「更多的條件」的確可以讓我們更精準地找到圓心  
當然！努力不懈也是一個好方法！

OK

### 活動三：通過兩點的圓

活動目標：接續同樣的情境讓學生藉由相同的操作畫出「通過給定兩點的圓形」，並透過所畫出的圓心位置，觀察出滿足條件的位置落在兩點連線段的中垂線上

#### 學習單內容

##### 【實驗操作】

##### 活動引言：

隊員傳來消息！！在樹叢中發現了另一座曾經位於圓形城牆上的「樓塔」。

我們現在有辦法利用兩座樓塔遺跡，找出原本的「城鎮中心」

與「圓形城牆位置」嗎？

定位出寶藏可能的位置吧！

##### 實驗目標：

「決定要挖掘的位置」並

「標示原本的圓形城牆」

● 樓塔在原本圓形的城牆上

● 寶藏在圓形城牆的圓心

##### 操作步驟：

1. 拖曳「紅色叉叉」並點擊「確定挖掘位置」決定要挖掘寶藏的位置
2. 拖曳「紅點」調整圓形城牆大小讓圓周通過T點吧
3. 點擊「確定城牆遺跡」並看看有沒有挖到寶藏吧
4. 至少進行五次符合條件的挖掘吧

##### 操作小叮嚀：

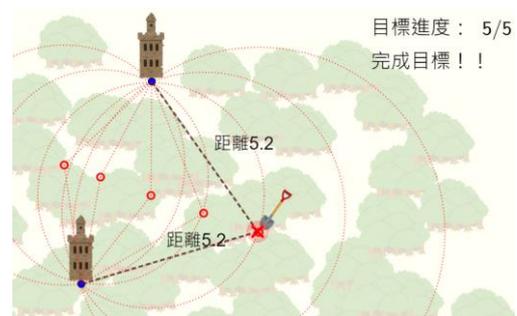
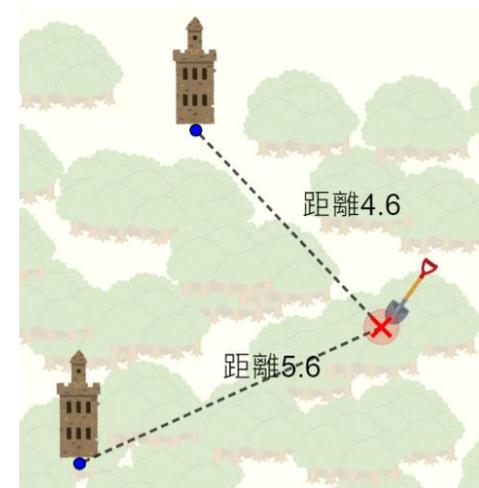
第一次挖掘後會給予學生到兩點距離的提示，可依據到兩點距離是否相同給予操作提示。

#### 活動畫面

##### 參考操作畫面



##### 參考操作完成畫面



**【觀察記錄 1】**

下列哪些點，有機會挖到寶藏？

1. A 點到兩座塔的距離相同嗎？

相同  不相同

作答錯誤回饋：

A 點到兩座塔的距離有相同嗎？

A 點有機會挖到寶藏嗎？

有機會  沒有機會

作答錯誤回饋：

如果 A 點到兩座塔的距離不相同，

A 點會有機會挖到寶藏嗎？

(以 A 點為圓心可以畫出通過 T1、T2 點的圓嗎)

2. B 點到兩座塔的距離相同嗎？

相同  不相同

B 點有機會挖到寶藏嗎？

有機會  沒有機會

3. C 點到兩座塔的距離相同嗎？

相同  不相同

C 點有機會挖到寶藏嗎？

有機會  沒有機會

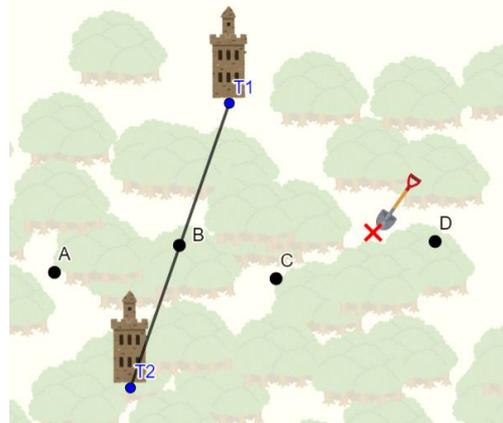
4. D 點到兩座塔的距離相同嗎？

相同  不相同

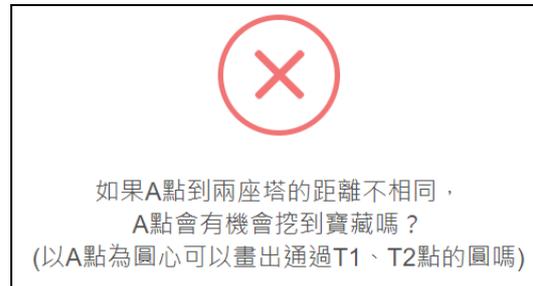
D 點有機會挖到寶藏嗎？

有機會  沒有機會

**參考操作畫面**



**作答回饋範例**



### 【觀察記錄 2】

1. 你所畫出的符合條件的圓形城牆是否都有同時通過 T1、T2 點呢？

是  否  不一定

作答錯誤回饋：

檢查一下畫面中的紅色虛線有沒有都通過 T1、T2 點呢？

2. 你有機會挖掘到寶藏的地點(紅色圈圍)，位置都相同嗎？

相同  不相同

作答錯誤回饋：

檢查一下畫面中的紅色圈圍位置都相同嗎？

3. 你所畫出的圓形城牆的大小都相同嗎？

相同  不相同

作答錯誤回饋：

檢查一下畫面中的虛線圓形城牆大小都相同嗎？

### 參考操作畫面



### 作答回饋範例



### 【問題探索】

1. 你覺得同時通過 T1、T2 兩點的圓有幾個？

1 個  2 個  3 個

無限多個

作答錯誤回饋：

我們剛剛至少畫了五個通過 T1、T2 點的圓對吧？

2. 同時通過 T1、T2 的圓，他的圓心到 T1 與 T2 的距離相同嗎？

是  否  不一定

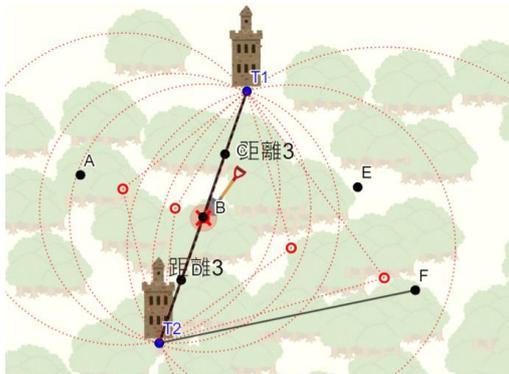
作答錯誤回饋：

落在同一個圓上的兩點 T1、T2，到圓心的距離應該要相同才對

3. 同時通過 T1、T2 兩點的圓中，有最小的嗎？

有  沒有

### 參考操作畫面



### 作答回饋範例



4. 通過 T1、T2 兩點的圓中，最小圓的圓心會落在那裡？

- A 點  B 點 (T1、T2 中點)  
 C 點  D 點  E 點  F 點

作答正確回饋：

沒錯，最小的圓應該就是以 T1、T2 的連線段作為直徑的圓了！

5. 通過 T1、T2 兩點的圓，他們的圓心都落在哪裡？

$\overline{T_1T_2}$  中垂線上

$\angle T_1T_2F$  的角平分線

$\overline{T_1T_2}$  上   $\overline{BC}$  上

作答錯誤回饋：

能畫出同時通過 T1、T2 圓的圓心，到 T1、T2 的距離也應該要相同才對，蒐集所有到 T1、T2 等距離的點會是什麼圖形呢？

6. 如果你想要更確切找到寶藏位置，你覺得需要增加哪些條件？

知道寶藏到樓塔的距離

知道所畫圓是否能再通過其他樓塔

再找到與另外兩個樓塔等距離的中垂線

沿著  $\overline{T_1T_2}$  的中垂線挖掘，總會找到

作答回饋：

沒錯！不論是「確切的半徑長」

或是「更多會通過的樓塔」，

我們都好像需要更多條件。

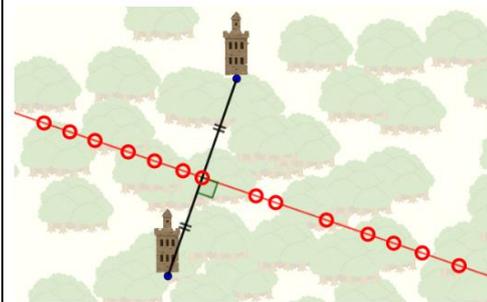
但是，中垂線一定可以幫助到我們！



沒錯，最小的圓應該就是以 T1、T2 的連線段作為直徑的圓了！



能畫出同時通過 T1、T2 圓的圓心，他到 T1、T2 的距離也應該要相同才對，蒐集所有到 T1、T2 等距離的點會是什麼圖形呢？



恭喜完成問題探索  
沒錯！不論是「確切的半徑長」  
或是「更多會通過的樓塔」，  
我們都好像需要更多條件。  
但是，中垂線一定可以幫助到我們！

活動四：通過三點的圓形

活動目標：先透過活動讓學生練習操作中垂線作圖工具，接著依據同樣的情境讓學生藉由相同的操作畫出「通過給定三點的圓形」，也就是外接圓圓心的位置。

學習單內容

活動畫面

【中垂線工具－實驗操作】

活動引言：

我們剛剛發現寶藏的地點一定在樓塔連線段的中垂線上，因為落在中垂線上的點「到線段兩端點等距離」。

所以在接下去之前我們先來認識我們的「中垂線工具」吧！

實驗目標：

利用「中垂線作圖工具」畫出 $\overline{AB}$ 的中垂線吧！

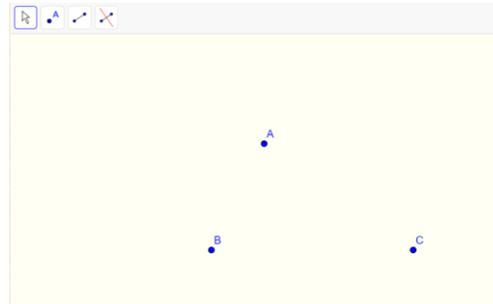
操作步驟：

1. 點選「中垂線作圖工具」
2. 依序點擊A、B兩點作出 $\overline{AB}$ 的中垂線
3. 依序點擊B、C兩點作出 $\overline{BC}$ 的中垂線
4. 點擊「游標工具」

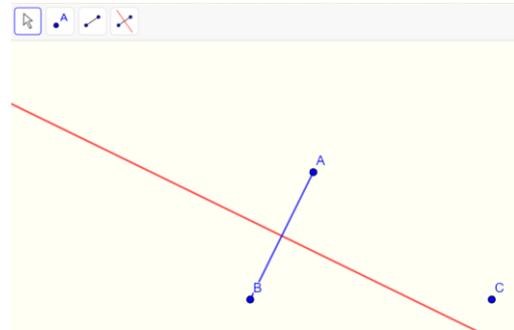
操作小叮嚀：

操作時記得切換成「中垂線作圖工具」，再點及兩端點完成中垂線作圖。

參考操作畫面



參考畫面：依序點擊A、B兩點作出中垂線



【中垂線工具－觀察記錄】

1. 下列哪些點落在 $\overline{AB}$ 的中垂線上呢？

P  Q  R  S

作答錯誤回饋：

P點有在中垂線上嗎？

Q點沒有在中垂線上嗎？

R點沒有在中垂線上嗎？

S點有在中垂線上嗎？

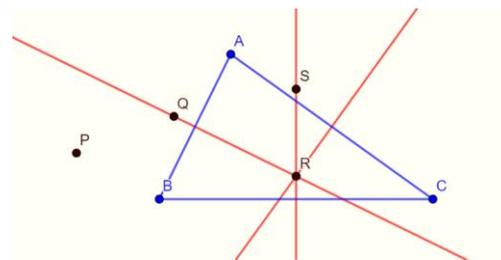
2. 下列哪些點落在 $\overline{BC}$ 的中垂線上呢？

P  Q  R  S

3. 下列哪些點落在 $\overline{AC}$ 的中垂線上呢？

P  Q  R  S

參考操作畫面



作答回饋範例



沒錯！R都落在中垂線上  
而且R同時落三條中垂線上！  
這會是個巧合嗎？

## 【實驗操作】

### 活動引言：

接獲消息，剛剛隊員又再發現了第三座曾經位於圓形城牆上的「樓塔」。

這樣子我們有辦法找出原本的「城鎮中心」與「圓形城牆位置」嗎？

帶著新工具，趕緊試著定位出寶藏所在的位置吧！

### 實驗目標：

- 三座樓塔都在圓形城牆上
- 寶藏在圓形城牆的圓心
- 多多利用中垂線作圖工具找到符合目標的地點吧

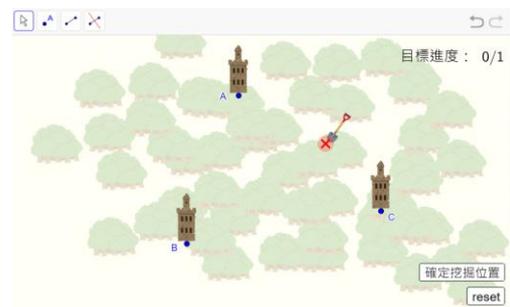
### 操作步驟：

1. 點選「中垂線作圖工具」
2. 依序點擊 A、B 兩點作出  $\overline{AB}$  的中垂線
3. 依序點擊 B、C 兩點作出  $\overline{BC}$  的中垂線
4. 點選「游標工具」後決定挖掘的地點
5. 拖曳「紅色叉叉」到兩條中垂線的交點，並調整合適的半徑使圓周通過 A、B、C 三點，看看會不會挖到寶藏吧！！

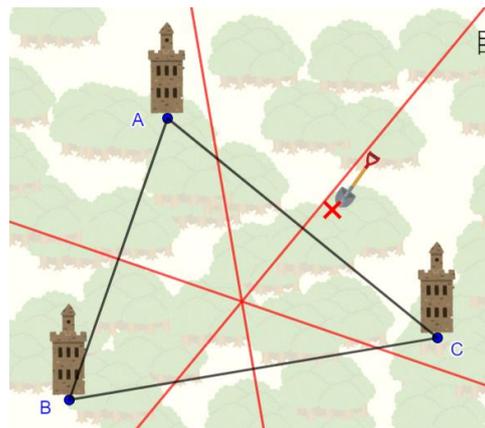
### 操作小叮嚀：

作中垂線時記得切換成「中垂線作圖工具」；決定圓心與畫圓時，也可以記得提醒同學換成「游標工具」再進行操作。

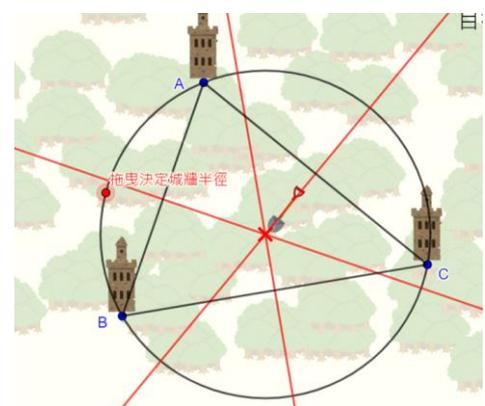
## 參考操作畫面



### 畫出中垂線



### 以中垂線交點為圓心畫出通過三點的圓



## 參考操作完成畫面



【觀察記錄】

1. 寶藏的所在地P點是否落在 $\overline{AB}$ 的中垂線上？

是  否

作答錯誤回饋：

觀察一下P點有沒有在中垂線上

2. 根據P落在 $\overline{AB}$ 的中垂線上，我們可以得到下面哪一個性質？

$\overline{PA} = \overline{PB}$    $\overline{PB} = \overline{PC}$

$\overline{PA} = \overline{PC}$

3. 寶藏的所在地P點是否落在 $\overline{BC}$ 的中垂線上？

是  否

4. 根據P落在 $\overline{BC}$ 的中垂線上，我們可以得到下面哪一個性質？

$\overline{PA} = \overline{PB}$    $\overline{PB} = \overline{PC}$

$\overline{PA} = \overline{PC}$

5. 根據上面的問題， $\overline{PA}$ 與 $\overline{PC}$ 是否會相等？

是  否

作答錯誤回饋：

根據前面的兩個等式，再想想看

6. 請問P點會落在 $\overline{AC}$ 的中垂線上嗎？

會  不會

作答錯誤回饋：

P到A、C兩點等距離，想想看中垂線的性質

作答回饋範例



觀察一下P點有沒有在中垂線上



P到A、C兩點等距離，想想看中垂線的性質



沒錯！因為P到A、C等距離，所以會落在中垂線上。  
所以我們知道三角形兩邊中垂線的交點，會落在第三邊中垂線上

恭喜完成觀察記錄

### 【問題探索】

1. 下列有關於找出圓心位置的方法哪些正確？

■  $\overline{AB}$ 中垂線與 $\overline{BC}$ 中垂線的交點

■  $\overline{BC}$ 中垂線與 $\overline{AC}$ 中垂線的交點

■  $\overline{AB}$ 中垂線與 $\overline{AC}$ 中垂線的交點

■  $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 三線段中垂線的交點

作答錯誤回饋：

剛剛我們了解到，第三邊的中垂線也一定會通過另外兩邊的中垂線交點，這樣我們可不可以少畫一邊呢？

第三條中垂線一定會和另外兩條中垂線交於同一點，雖然畫兩條中垂線就足夠了，但畫三條中垂線也沒有關係啦

2. 一定要做三條中垂線才能找到通過三點的圓的圓心嗎？

一定要做三條中垂線，因為三條中垂線不一定會交於同一點

■ 只要做兩條中垂線就夠了，因為第三條中垂線一定會經過另外兩條中垂線的交點

作答錯誤回饋：

想想觀察紀錄，三條中垂線一定會交於一點喔

作答正確回饋：

沒錯！以後我們只要畫兩條中垂線就可以找到圓心的位置了！！

不過圓心的位置一定會在三角形的裡面嗎？

### 作答回饋範例



剛剛我們了解到，第三邊的中垂線也一定會通過另外兩邊的中垂線交點，這樣我們可不可以少畫一邊呢？



第三條中垂線一定會和另外兩條中垂線交於同一點，雖然畫兩條中垂線就足夠了，但畫三條中垂線也沒有關係啦



想想觀察紀錄，三條中垂線一定會交於一點喔



沒錯！以後我們只要畫兩條中垂線就可以找到圓心的位置了！！  
不過圓心的位置一定會在三角形的裡面嗎？

活動五：圓心在哪裡呢？

活動目標：透過實際操作三角形頂點的位置，改變三角形的樣子，讓操作者可以看見外心位置的動態變化

學習單內容

活動畫面

**【實驗操作】**

**活動引言：**

我們接下來探索看看圓心的位置與三角形之間到底有什麼關係吧！

**實驗目標：**

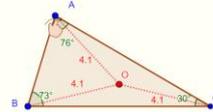
拖動 A 點觀察通過三點的圓其圓心位置如何改變

**操作步驟：**

1. 拖動 A 點觀察圓心的位置
2. 先拖動 A 點讓  $\angle A > 100^\circ$ ，並觀察 O 點的位置
3. 再拖動 A 點讓  $\angle B > 120^\circ$ ，並觀察 O 點的位置

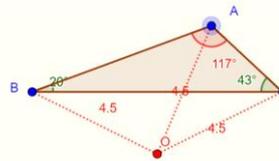
**參考操作畫面**

- 顯示通過 A、B、C 三點的圓
- 顯示中垂線



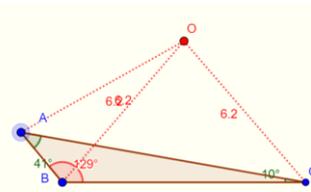
O 點落在  $\triangle ABC$  內部

步驟：讓  $\angle A > 100^\circ$



O 點落在  $\triangle ABC$  外部

步驟：讓  $\angle B > 120^\circ$



O 點落在  $\triangle ABC$  外部

### 【觀察記錄】

1. 拖動 A 點的過程中，你發現外心 O 點的位置，可能會在哪些地方？

$\triangle ABC$  內部   $\overline{AB}$  邊上

$\overline{BC}$  邊上   $\overline{AC}$  邊上

$\triangle ABC$  外部

2. 當外心 O 點在三角形的內部時，

$\angle A$  是什麼角？

銳角  直角  鈍角

$\angle B$  是什麼角？

銳角  直角  鈍角

$\angle C$  是什麼角？

銳角  直角  鈍角

作答錯誤回饋：

有角度記錄錯誤喔，檢查看看

小於 90 度的是銳角、大於 90 度的是鈍角

3. 當外心 O 點落在  $\overline{AB}$  上時，

$\angle A$  是什麼角？

銳角  直角  鈍角

$\angle B$  是什麼角？

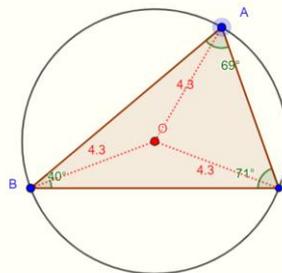
銳角  直角  鈍角

$\angle C$  是什麼角？

銳角  直角  鈍角

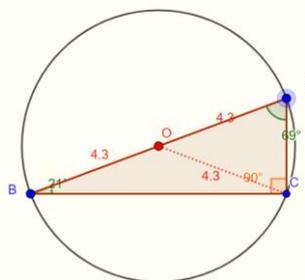
### 參考操作畫面

銳角三角形



O 點落在  $\triangle ABC$  內部

直角三角形



O 點落在  $\triangle ABC$  上

### 作答回饋範例



看起來好像什麼地方都有可能！  
那你有發現是根據什麼改變的嗎？



有角度記錄錯誤喔，檢查看看  
小於 90 度的是銳角、大於 90 度的是鈍角



O 在邊上時候，三角形的其中一個內角看起來會是直角  
恭喜完成觀察紀錄

### 【問題探索】

拖動 A 點回答下列問題

1. 當 $\triangle ABC$  是銳角三角形時，圓心 O 會落在什麼地方？

- 三角形內部  
 三角形邊上  
 三角形外部

作答正確回饋：

銳角三角形時，圓心會在內部

2. 當 $\triangle ABC$  是直角三角形時，圓心 O 會落在什麼地方？

- 三角形內部  
 三角形邊上  
 三角形外部

作答正確回饋：

直角三角形時，圓心會在邊上

3. 當 $\triangle ABC$  是銳角三角形時，圓心 O 會落在什麼地方？

- 三角形內部  
 三角形邊上  
 三角形外部

作答正確回饋：

鈍角三角形時，圓心會在外部

原來位置是和三角形的內角大小有關

4. 如果要給這個圓心命個名，你想叫它甚麼名字？

- 三點圓心  三中垂線圓心  
 外心  內心  
 重心  垂心

### 小叮嚀：

最後一題會依據不同的選項給予不同的回饋，但無論選擇那一個選項皆會完成活動。

### 作答回饋範例



銳角三角形時，圓心會在內部



鈍角三角形時，圓心會在外部  
原來位置是和三角形的內角大小有關



取得不錯！但是在數學上我們把它命名為「外心」，也就是外接圓的圓心喔！



取得不錯！不過「內心」在數學中其實另有其人，我們馬上也會遇到的。  
在數學上我們把這個圓心命名為「外心」，也就是外接圓的圓心喔！



取得不錯！不過「重心」在數學中其實另有其人，我們馬上也會遇到的。  
在數學上我們把這個圓心命名為「外心」，也就是外接圓的圓心喔！



真是不錯！！在數學上我們就是命名為「外心」，也就是外接圓的圓心喔！

# 《數學獨立探索數位實驗活動：挑戰俄羅斯輪盤\_九年級》

編號：\_\_\_\_\_ (由主辦單位填寫)

設計者：劉建成、賴姵伶、呂鳳琳

李慧玲、謝熹鈴

## 壹、基本資料

一、 學具名稱：挑戰俄羅斯輪盤

二、 學習單元：九年級機率

三、 先備子技能：

1. **D-8-1 統計資料處理**：累積次數、相對次數、累積相對次數折線圖。

四、 核心子技能：

1. **D-9-2 認識機率**：機率的意義；樹狀圖（以兩層為限）。
2. **D-9-3 古典機率**：具有對稱性的情境下（銅板、骰子、撲克牌、抽球等）之機率；不具對稱性的物體（圖釘、圓錐、爻杯）之機率探究。

五、 後續子技能：

1. **D-10-3 有系統的計數**：有系統的窮舉，樹狀圖，加法原理，乘法原理，取捨原理。直線排列與組合
2. **D-10-4 複合事件的古典機率**：樣本空間與事件，複合事件的古典機率性質，期望值。

六、 學具定位：奠基      精熟      延伸      科展、專題（可複選）

七、 使用模式：課前      課中      課後      其他：\_\_\_\_\_

八、 學習目標：在以「數學奠基模組\_俄羅斯輪盤」為基礎，進行數學實驗探究。

1. 活動 1：是不確定嗎？
2. 活動 2：發展機率
3. 活動 3：發展樹狀圖
4. 活動 4：利用機率解決情境問題

★**奠基**：適合在課前或課中使用，提供學生操作的先備經驗以奠定後續概念發展學習的基礎。

★**精熟**：適合在課中或課後使用，提供學生精熟某個已學習之概念的機會。

★**延伸(加深加廣)**：適合在課中或課後使用，提供學生課外補充或銜接後續章節的學習機會。

## 貳、 數學獨立探索數位實驗活動設計目標與核心概念

- 一、本活動目標在以「數學奠基模組\_俄羅斯輪盤」為基礎，結合多媒體學習工具，發展可供學生獨立自主進行探索的實驗活動。教師也能將此活動融入遠距教學，透過線上指導的方式進行數學實驗探究。
- 二、以建模活動為中心，讓學生在問題解決的具體情境中，透過實驗操作、觀察記錄與問題探索等循序漸進方式進行有意義的學習。
- 三、提供機會讓學生在操作的過程中提出問題、進行臆測，並動手試驗探索實例，最後根據觀察到的結果，確認或修正自己的想法。在此教學模式中，學生能從既有的數學物件上產生行動，依據實驗活動指引內化為心智中的數學過程，最後將相關概念整合成新的數學物件，持續運作這樣的循環來逐步建構自身的知識體系。

## 參、 設計原則

- 一、每一個活動階段提供虛擬學具作為學生探索實驗的工具。
- 二、每一個活動階段僅訂立一個數學概念學習目標。
- 三、每一個活動階段由一系列可供學生具體操作的任務所組成。
- 四、每一個任務包含實驗操作的指引、可觀察的數據或行為紀錄、引發學生反思的探索問題。

## 肆、 設計架構



以「實驗操作」、「觀察記錄」與「問題探索」為設計架構。

- 一、活動階段：依據數學獨立探索實驗活動之教學目標切割成數個小活動階段，以提供循序漸進的學習軌道。
- 二、實驗操作：學生的具體操作步驟。
- 三、觀察紀錄：學生可以根據操作完的畫面結果直接進行觀察、記錄。
- 四、問題探索：學生可以根據操作、紀錄之結果思考回答的問題。

伍、 操作脚本(學習紀錄單+操作介面)

### 活動1：探討什麼時候會有不確定性

**【學習目標】**  
生活中常常會有二選一，機率就會是1/2，真的是如此嗎？讓學生感受到什麼時候會有不確定性出現，會有機率的需求，也希望引出錯誤的直觀，讓學生在接下來的過程中有機會反思調整。



↓

### 活動2：發展機率

**【學習目標】**  
隨機試驗中，某事件發生的相對次數會剛好等於機率值嗎？本活動階段將模擬一個隨機試驗，探討相對次數與機率值的關係。



↓

### 活動3：發展樹狀圖

**【學習目標】**  
複合事件中，如何推知事件發生的機率？本活動階段將以上一個階段的轉盤轉動兩次進行模擬試驗，並且發展樹狀圖表徵。



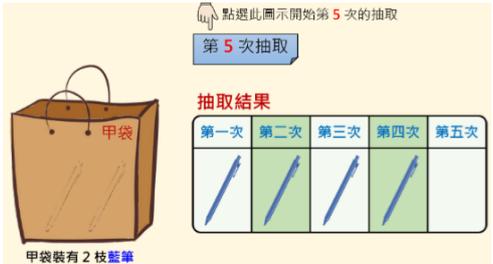
↓

### 活動4：利用機率解決情境問題

**【學習目標】**  
透過真實情境的問題，考驗學生轉化建模的能力，檢核是否能整合之前學習歷程中習得的概念。

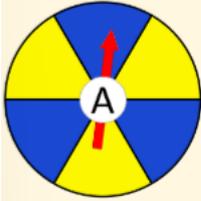
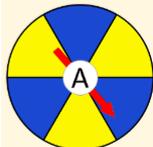


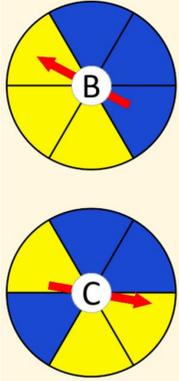
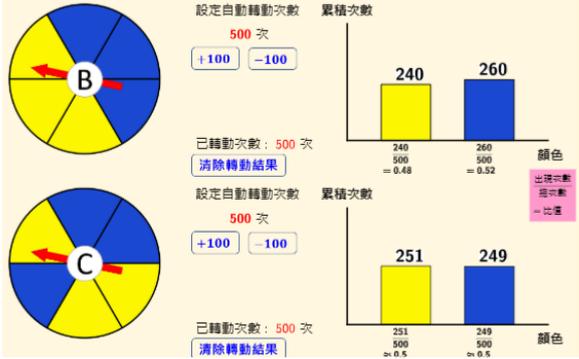
一、 活動 1：探討什麼時候會有不確定性

<p>編號</p>	<p style="text-align: center;">活動階段目標：</p> <p>生活中常常會有二選一，機率就會是 1/2，真的是如此嗎？讓學生感受到什麼時候會有不確定性出現，會有機率的需求，也希望引出錯誤的直觀，讓學生在接下來的過程中有機會反思調整。</p>													
<p>1.</p>	<p><b>1-1 實驗操作 1A</b></p> <p>有甲、乙兩種袋子。甲袋放入 2 枝藍筆，乙袋放入 1 枝藍筆，1 枝紅筆。</p> <p>若要抽藍筆，你會選哪個袋子來抽？</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> 甲袋    <input type="checkbox"/> 乙袋</p> <p>「選定袋子讓後，會到下一個操作，讓他抽取所選之袋子 5 次」</p>													
<p>2.</p>	<p><b>1-2 實驗操作 1B</b></p> <p>請從乙袋中點選你要抽取的筆 5 次。</p> <p>「需點選袋中的其中一枝筆」</p>	 <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>第一次</th> <th>第二次</th> <th>第三次</th> <th>第四次</th> <th>第五次</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;">👉</td> </tr> </tbody> </table>	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	👉	👉	👉	👉	👉		
第一次	第二次	第三次	第四次	第五次										
👉	👉	👉	👉	👉										
<p>3.</p>	<p><b>1-3 觀察記錄 1</b></p> <p>將實驗操作 1B 結果記錄</p>	<p>將剛才 5 次抽到物品的結果記錄於下方表格。</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>抽物品次序</th> <th>結果</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>第一次</td> <td style="text-align: center;">藍筆 ▾</td> </tr> <tr> <td>第二次</td> <td style="text-align: center;">藍筆 ▾</td> </tr> <tr> <td>第三次</td> <td style="text-align: center;">藍筆 ▾</td> </tr> <tr> <td>第四次</td> <td style="text-align: center;">藍筆 ▾</td> </tr> <tr> <td>第五次</td> <td style="text-align: center;">藍筆 ▾</td> </tr> </tbody> </table>	抽物品次序	結果	第一次	藍筆 ▾	第二次	藍筆 ▾	第三次	藍筆 ▾	第四次	藍筆 ▾	第五次	藍筆 ▾
抽物品次序	結果													
第一次	藍筆 ▾													
第二次	藍筆 ▾													
第三次	藍筆 ▾													
第四次	藍筆 ▾													
第五次	藍筆 ▾													
<p>4.</p>	<p><b>1-4 問題探索 1</b></p> <p>如果一定要抽中藍筆，你要選哪一個袋子抽藍筆？</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> 甲袋    <input type="checkbox"/> 乙袋</p> <p>「評量學生是否已了解應選甲袋」</p> <p><u>選乙袋回饋</u>：乙袋有可能會抽到紅筆喔，你要不要再想想看？</p>													

5.	<p><b>2-1 實驗操作 2A</b></p> <p>有甲、乙兩種袋子。甲袋放入 2 枝藍筆，乙袋放入 1 枝藍筆，1 枝紅筆。</p> <p>若要抽紅筆，你會選哪個袋子來抽？</p> <p><input type="checkbox"/> 甲袋    <input checked="" type="checkbox"/> 乙袋</p> <p>「重複實驗 1A 只改成問紅筆」</p>	<p>如圖，有甲、乙兩種袋子 甲袋會放入 2 枝藍筆 乙袋會放入 1 枝藍筆，1 枝紅筆 試回答 實驗操作 2A 的問題 😊</p> 												
6.	<p><b>2-2 實驗操作 2B</b></p> <p>請從乙袋中點選你要抽取的筆 5 次。</p> <p>「需點選袋中的其中一枝筆」</p>	<p>點選此圖示開始第 5 次的抽取</p> <p>第 5 次抽取</p> <p>抽取結果</p> <table border="1" data-bbox="957 627 1260 750"> <thead> <tr> <th>第一次</th> <th>第二次</th> <th>第三次</th> <th>第四次</th> <th>第五次</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p>乙袋裝有 1 枝藍筆，1 枝紅筆</p>	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次							
第一次	第二次	第三次	第四次	第五次										
7.	<p><b>2-2 觀察記錄 2</b></p> <p>將實驗操作 2B 結果記錄</p>	<p>將剛才 5 次抽到物品的結果記錄於下方表格。</p> <table border="1" data-bbox="1005 840 1412 1142"> <thead> <tr> <th>抽物品次序</th> <th>結果</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>第一次</td> <td><input type="text" value="藍筆"/></td> </tr> <tr> <td>第二次</td> <td><input type="text" value="紅筆"/></td> </tr> <tr> <td>第三次</td> <td><input type="text" value="紅筆"/></td> </tr> <tr> <td>第四次</td> <td><input type="text" value="紅筆"/></td> </tr> <tr> <td>第五次</td> <td><input type="text" value="藍筆"/></td> </tr> </tbody> </table>	抽物品次序	結果	第一次	<input type="text" value="藍筆"/>	第二次	<input type="text" value="紅筆"/>	第三次	<input type="text" value="紅筆"/>	第四次	<input type="text" value="紅筆"/>	第五次	<input type="text" value="藍筆"/>
抽物品次序	結果													
第一次	<input type="text" value="藍筆"/>													
第二次	<input type="text" value="紅筆"/>													
第三次	<input type="text" value="紅筆"/>													
第四次	<input type="text" value="紅筆"/>													
第五次	<input type="text" value="藍筆"/>													
8.	<p><b>2-3 問題探索 2</b></p> <p>如果讓你重新選擇，你要選哪一個袋子抽紅筆？</p> <p><input type="checkbox"/> 甲袋    <input checked="" type="checkbox"/> 乙袋</p> <p>「如果學生在實驗前選錯，評量是否已了解應選乙袋」</p> <p><u>選甲袋回饋</u>：甲袋裝 2 支藍筆，會有機會抽到紅筆嗎？你要不要再想想看</p>	<p>如果想要抽中紅筆，該選哪個袋子抽會比較好呢？</p>  <p>甲袋裝有 2 枝藍筆      乙袋裝有 1 枝藍筆，1 枝紅筆</p>												
9.	<p><b>2-4 問題探索 3</b></p> <p>右列哪一個情況才有可能抽到紅筆但又不確定能抽中呢？</p> <p><input type="checkbox"/> 袋子裡有兩支藍筆</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> 袋子裡有一支藍筆跟一支紅筆</p> <p><input type="checkbox"/> 袋子裡有一個釘書機跟一支紅筆</p> <p>「評量學生是否了解什麼時候會有不確定性」</p>	<p>下面哪個袋子有可能會抽到紅筆但又不確定一定能抽中呢？</p>  <p>2 枝藍筆      1 枝藍筆 1 枝紅筆      1 枝紅筆 1 個釘書機</p>												

## 二、 活動 2：發展機率

編號	<b>活動階段目標：</b> 隨機試驗中，某事件發生的相對次數會剛好等於機率值嗎？本活動階段將模擬一個隨機試驗，探討相對次數與機率值的關係。										
1.	<b>1-1 實驗操作 1A</b> 猜猜看，轉動 10 次輪盤後，結果為黃色會有幾次？結果為藍色會有幾次？ 黃色：【   】次   藍色：【   】次	<div style="text-align: right; color: red; font-weight: bold;">挑戰俄羅斯輪盤</div>  <p>【轉盤A】平分為 6 區 分別為 3 區藍色與 3 區黃色 指針經轉動後會隨機停在任意一個區域 試回答 實驗操作1A 的問題</p>									
2.	<b>1-2 實驗操作 1B</b> 點擊 10 次「轉盤 A 圖示」完成 10 次輪盤的轉動	<p>我的猜測：黃色會有 5 次，藍色會有 5 次</p>  <p>已轉動次數：10 次</p>									
3.	<b>1-3 觀察記錄 1</b> 將輪盤轉動 10 次後的結果記錄於下方表格。	<p>將輪盤轉動10次後的結果記錄於下方表格。</p> <table border="1" data-bbox="831 1104 1302 1279"> <thead> <tr> <th>結果</th> <th>次數</th> <th>比值</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>黃色</td> <td style="text-align: center;">5 ▾</td> <td style="text-align: center;">0.5 ▾</td> </tr> <tr> <td>藍色</td> <td style="text-align: center;">5 ▾</td> <td style="text-align: center;">0.5 ▾</td> </tr> </tbody> </table>	結果	次數	比值	黃色	5 ▾	0.5 ▾	藍色	5 ▾	0.5 ▾
結果	次數	比值									
黃色	5 ▾	0.5 ▾									
藍色	5 ▾	0.5 ▾									
4.	<b>1-4 問題探索 1</b> 在實驗操作 1A 時，你猜測 10 次結果中會出現 6 次黃色，4 次藍色。你猜錯的理由是： <input type="checkbox"/> 運氣差 <input type="checkbox"/> 分析錯誤 然後再重新預測，如何猜？ <input type="checkbox"/> 黃色、藍色次數一樣多 <input type="checkbox"/> 黃色次數多，藍色次數少 <input type="checkbox"/> 黃色次數少，藍色次數多										
5.	<b>2-1 實驗操作 2</b> 完成轉動輪盤 500 次	 <p>設定自動轉動次數 500 次</p> <p>累積次數</p>  <p>已轉動次數：500 次</p>									

6.	<p><b>2-2 觀察記錄 2</b></p> <p>將輪盤轉動 500 次的結果記錄於下方表格。</p>	<p>將輪盤轉動500次的結果記錄於下方表格。</p> <table border="1" data-bbox="831 241 1265 412"> <thead> <tr> <th>結果</th> <th>次數</th> <th>比值</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>黃色</td> <td>257</td> <td>0.51</td> </tr> <tr> <td>藍色</td> <td>243</td> <td>0.49</td> </tr> </tbody> </table>	結果	次數	比值	黃色	257	0.51	藍色	243	0.49									
結果	次數	比值																		
黃色	257	0.51																		
藍色	243	0.49																		
7.	<p><b>2-3 問題探索 2</b></p> <p>觀察上方表格及左方圖表中的數據，你認為【轉盤 A】出現藍色的比值最接近下列哪一個值？</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> <math>\frac{1}{2}</math>   <input type="checkbox"/> <math>\frac{1}{3}</math>   <input type="checkbox"/> <math>\frac{1}{4}</math>   <input type="checkbox"/> 不確定</p> <p><u>錯誤選項回饋</u>：請參考一下實驗的數據(如上表)，再想想</p>																			
8.	<p><b>3-1 實驗操作 3A</b></p> <p>左圖中有二種不同的盤面，你認為轉到藍色的比值，會接近下列哪一個數？</p> <p>(1)轉盤 B</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> <math>\frac{1}{2}</math>   <input type="checkbox"/> <math>\frac{1}{3}</math>   <input type="checkbox"/> <math>\frac{1}{4}</math>   <input type="checkbox"/> 不確定</p> <p>(2)轉盤 C</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> <math>\frac{1}{2}</math>   <input type="checkbox"/> <math>\frac{1}{3}</math>   <input type="checkbox"/> <math>\frac{1}{4}</math>   <input type="checkbox"/> 不確定</p>	 <p><b>挑戰俄羅斯輪盤</b></p> <p>如左圖，現在有另外兩種不同的盤面分別是【轉盤B】和【轉盤C】</p> <p>試回答 實驗操作3A 的問題</p>																		
9.	<p><b>3-2 實驗操作 3B</b></p> <p>請將【輪盤 B】和【輪盤 C】的自動轉動次數設定為 500 次，設定好自動轉動次數後，按下【轉盤 B】和【轉盤 C】的自動轉動，讓兩個轉盤一起轉。</p>	 <p>設定自動轉動次數 500 次</p> <p>累積次數</p> <table border="1" data-bbox="1209 1384 1433 1541"> <thead> <tr> <th>顏色</th> <th>次數</th> <th>比值</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>黃色</td> <td>240</td> <td>0.48</td> </tr> <tr> <td>藍色</td> <td>260</td> <td>0.52</td> </tr> </tbody> </table> <p>已轉動次數：500 次</p> <p>清除轉動結果</p> <p>設定自動轉動次數 500 次</p> <p>累積次數</p> <table border="1" data-bbox="1209 1563 1433 1720"> <thead> <tr> <th>顏色</th> <th>次數</th> <th>比值</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>黃色</td> <td>251</td> <td>0.5</td> </tr> <tr> <td>藍色</td> <td>249</td> <td>0.5</td> </tr> </tbody> </table> <p>已轉動次數：500 次</p> <p>清除轉動結果</p>	顏色	次數	比值	黃色	240	0.48	藍色	260	0.52	顏色	次數	比值	黃色	251	0.5	藍色	249	0.5
顏色	次數	比值																		
黃色	240	0.48																		
藍色	260	0.52																		
顏色	次數	比值																		
黃色	251	0.5																		
藍色	249	0.5																		

10. 3-3 觀察記錄 3  
將輪盤 B 和輪盤 C 轉動 500 次的結果記錄於下方表格

【轉盤B】

結果	次數	比值
黃色	240	0.48
藍色	260	0.52

【轉盤C】

結果	次數	比值
黃色	251	0.5
藍色	249	0.5

11. 3-4 問題探索 3  
試判斷下列說明【轉盤 A】、【轉盤 B】、【轉盤 C】轉到藍色的比值，結果都是很接近 1/2 的理由是否正確？

(1) 因為只有黃色跟藍色兩種顏色  
 正確     錯誤  
錯誤答案回饋：如果藍色有 4 格，黃色有 2 格，結果還是如此嗎？

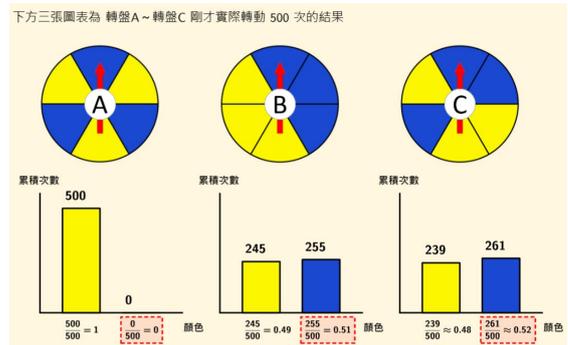
(2) 因為藍色跟黃色都是 3 格  
 正確     錯誤

(3) 因為出現的機會跟占的面積大小有關係  
 正確     錯誤

觀察這個結果，你認為影響出現機會的因素是什麼？

該顏色所占的面積大小  
 有幾種不同的顏色  
 排列的方式(同顏色集中或分散)

回饋：還要看該顏色所占的面積大小！



12. 4-1 實驗操作 4A  
猜看看，用【轉盤 D】轉動 10 次後，結果中會有幾次藍色？幾次黃色？  
 黃色：【    】次    藍色：【    】次

**挑戰俄羅斯輪盤**

如左圖，現在又換了一個新的盤面

【轉盤 D】同樣平分為 6 區  
 分別為 4 區藍色與 2 區黃色

指針經轉動後會隨機停在任意一個區域  
 試回答 實驗操作 4A 的問題

13.	<p>4-2 實驗操作 4B</p> <p>請轉動【輪盤 D】10 次</p>	<p>我的猜測：黃色會有 3 次，藍色會有 7 次</p>  <p>已轉動次數：10 次</p> <table border="1" data-bbox="1181 459 1420 548"> <thead> <tr> <th>顏色</th> <th>出現次數</th> <th>總次數</th> <th>比值</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>黃色</td> <td>4</td> <td>10</td> <td>= 0.4</td> </tr> <tr> <td>藍色</td> <td>6</td> <td>10</td> <td>= 0.6</td> </tr> </tbody> </table>	顏色	出現次數	總次數	比值	黃色	4	10	= 0.4	藍色	6	10	= 0.6
顏色	出現次數	總次數	比值											
黃色	4	10	= 0.4											
藍色	6	10	= 0.6											
14.	<p>4-3 觀察記錄 4</p> <p>將【轉盤 D】轉動 10 次後的結果記錄於下表：</p>	<p>將【轉盤 D】轉動 10 次後的結果記錄於下表：</p> <table border="1" data-bbox="829 616 1316 795"> <thead> <tr> <th>結果</th> <th>次數</th> <th>比值</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>黃色</td> <td>4</td> <td>0.4</td> </tr> <tr> <td>藍色</td> <td>6</td> <td>0.6</td> </tr> </tbody> </table>	結果	次數	比值	黃色	4	0.4	藍色	6	0.6			
結果	次數	比值												
黃色	4	0.4												
藍色	6	0.6												
15.	<p>4-4 問題探索 4</p> <p>在實驗操作 4A 時，你猜測 10 次結果中會出現 4 次黃色，6 次藍色。你猜錯的理由是：</p> <p><input type="checkbox"/> 運氣差   <input type="checkbox"/> 分析錯誤</p> <p><u>回饋</u>：別急著下結論，讓我們繼續實驗下去，驗證你的想法吧！</p> <p>再重新預測，如何猜？</p> <p><input type="checkbox"/> 黃色、藍色次數一樣多</p> <p><input type="checkbox"/> 黃色次數多，藍色次數少</p> <p><input type="checkbox"/> 黃色次數少，藍色次數多</p>													
16.	<p>5-1 實驗操作 5</p> <p>完成轉動【輪盤 D】500 次</p>	 <p>設定自動轉動次數 500 次</p> <p>已轉動次數：500 次</p> <p>消除轉動結果</p> <table border="1" data-bbox="1181 1534 1428 1612"> <thead> <tr> <th>顏色</th> <th>出現次數</th> <th>總次數</th> <th>比值</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>黃色</td> <td>165</td> <td>500</td> <td>= 0.33</td> </tr> <tr> <td>藍色</td> <td>335</td> <td>500</td> <td>= 0.67</td> </tr> </tbody> </table>	顏色	出現次數	總次數	比值	黃色	165	500	= 0.33	藍色	335	500	= 0.67
顏色	出現次數	總次數	比值											
黃色	165	500	= 0.33											
藍色	335	500	= 0.67											
17.	<p>5-2 觀察記錄 5</p> <p>將【輪盤 D】轉動 500 次的結果記錄於下方表格</p>	<p>將【輪盤 D】轉動 500 次的結果記錄於下方表格。</p> <table border="1" data-bbox="829 1668 1316 1848"> <thead> <tr> <th>結果</th> <th>次數</th> <th>比值</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>黃色</td> <td>165</td> <td>0.33</td> </tr> <tr> <td>藍色</td> <td>335</td> <td>0.67</td> </tr> </tbody> </table>	結果	次數	比值	黃色	165	0.33	藍色	335	0.67			
結果	次數	比值												
黃色	165	0.33												
藍色	335	0.67												
18.	<p>5-3 問題探索 5</p> <p>觀察上方表格及左方圖表中的數據，你認為【轉盤 D】出現藍色的比值會</p>													

接近下列哪一個值？

$\frac{1}{2}$      $\frac{1}{3}$      $\frac{2}{3}$      $\frac{1}{4}$

錯誤答案回饋：請參考一下實驗的數據(如上表)，再想想

19. 5-4 問題探索 6

下列有關機率的描述哪些是正確的呢？

(1) 必需知道這個實驗所有可能的結果有幾種。

正確    錯誤

錯誤答案回饋：如果不知道所有可能的結果有幾種，如何算出機率？再想想！

(2) 所有可能的結果發生的機會均相同。

正確    錯誤

錯誤答案回饋：如果發生的機會都不相同，如何算出機率？再想想！

(3) 甲事件發生的機率

$$= \frac{\text{甲事件所含可能結果的個數}}{\text{該實驗所有可能結果的個數}}$$

正確    錯誤

錯誤答案回饋：這就是機率的定義哦！

(4) 實際結果一定與機率完全符合。

正確    錯誤

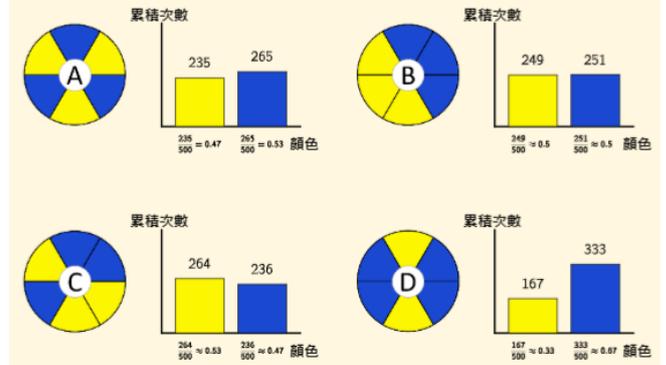
錯誤答案回饋：請觀察一下左欄的資料，再想想！

(5) 實驗的次數愈多，結果與計算出的機率愈接近。

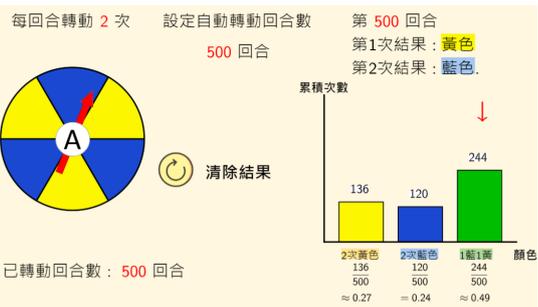
正確    錯誤

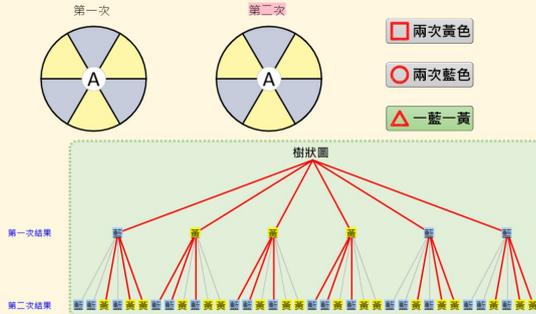
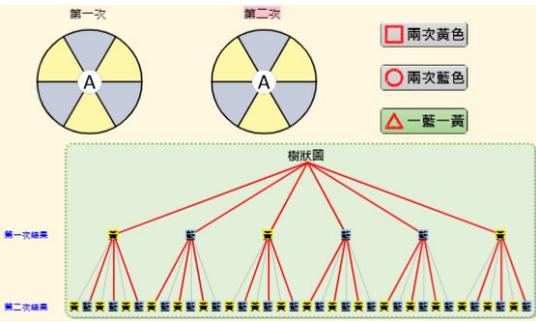
錯誤答案回饋：轉 10 次和 500 次，哪一個會比較接近呢？

下面四張圖表為 轉盤A~轉盤D 剛才實際轉動 500 次的結果



三、 活動 3：發展樹狀圖

<p>編號</p>	<p style="text-align: center;">活動階段目標：</p> <p>複合事件中，如何推知事件發生的機率?本活動階段將以上一個階段的轉盤，轉動兩次進行模擬試驗，並且發展樹狀圖表徵。</p>													
<p>1.</p>	<p><b>1-1 實驗操作 1A</b></p> <p>猜猜看，你認為轉動一回合（轉動 2 次），出現 1 次藍色 1 次黃色的機率會接近下列哪一個值？</p> <p><input type="checkbox"/> <math>\frac{1}{2}</math>    <input type="checkbox"/> <math>\frac{1}{3}</math>    <input type="checkbox"/> <math>\frac{1}{4}</math>    <input type="checkbox"/> 不確定</p> <p>「讓我們先轉動 10 回合看看結果會如何吧!」</p>													
<p>2.</p>	<p><b>1-2 實驗操作 1B</b></p> <p>1. 先預測接下來的回合會出現的結果（2 次黃色、2 次藍色、1 藍 1 黃），並於押注區選取。</p> <p>2. 按下「轉動 1 回合」按鈕，取得結果。</p> <p>3. 重複步驟 1~2，完成共 10 個回合。</p>													
<p>3.</p>	<p><b>1-3 觀察記錄 1</b></p> <p>將輪盤轉動 10 次後的結果記錄於下方表格</p>	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <thead> <tr> <th>結果</th> <th>回合數</th> <th>比值</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>2次黃色</td> <td>5</td> <td>0.5</td> </tr> <tr> <td>2次藍色</td> <td>2</td> <td>0.2</td> </tr> <tr> <td>1藍1黃</td> <td>3</td> <td>0.3</td> </tr> </tbody> </table>	結果	回合數	比值	2次黃色	5	0.5	2次藍色	2	0.2	1藍1黃	3	0.3
結果	回合數	比值												
2次黃色	5	0.5												
2次藍色	2	0.2												
1藍1黃	3	0.3												
<p>4.</p>	<p><b>1-3 問題探索 1</b></p> <p>你剛剛認為轉動一回合（轉動 2 次），出現 1 藍 1 黃的機率是 <math>\frac{1}{3}</math>，現在你認為出現 1 藍 1 黃的機率會接近下列哪一個值？</p> <p><input type="checkbox"/> <math>\frac{1}{2}</math>    <input type="checkbox"/> <math>\frac{1}{3}</math>    <input type="checkbox"/> <math>\frac{1}{4}</math>    <input type="checkbox"/> 不確定</p> <p>「讓我們多轉幾回合，驗證看看你的想法吧!」</p>													
<p>5.</p>	<p><b>2-1 實驗操作 2</b></p> <p>1. <b>預測</b> 一下輪盤轉動 500 回合 後，各情況出現的回合數：2 次黃色【   】回合          2 次藍色【   】回合          1 藍 1 黃【   】回合</p> <p>2. 請轉動 500 回合並記錄。</p>													

6.	<p><b>2-2 觀察記錄 2</b></p> <p>將輪盤轉動 500 回合後的結果記錄於下方表格</p>	<p>將輪盤A轉動500回合的結果記錄於下方表格。</p> <table border="1" data-bbox="938 232 1474 465"> <thead> <tr> <th>結果</th> <th>回合數</th> <th>比值</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>2次黃色</td> <td>136</td> <td>0.27</td> </tr> <tr> <td>2次藍色</td> <td>120</td> <td>0.24</td> </tr> <tr> <td>1藍1黃</td> <td>244</td> <td>0.49</td> </tr> </tbody> </table>	結果	回合數	比值	2次黃色	136	0.27	2次藍色	120	0.24	1藍1黃	244	0.49
結果	回合數	比值												
2次黃色	136	0.27												
2次藍色	120	0.24												
1藍1黃	244	0.49												
7.	<p><b>2-2 問題探索 2</b></p> <p>如果想要知道每一回合各種情況的機率，請問下列哪一個操作，會比較接近？</p> <p><input type="checkbox"/> 轉動 1 回合      <input type="checkbox"/> 轉動 10 回合</p> <p><input type="checkbox"/> 轉動 20 回合      <input checked="" type="checkbox"/> 轉動 1000 回合</p> <p><u>錯誤答案回饋</u>：轉動回合數太少了</p>													
8.	<p><b>3-1 實驗操作 3</b></p> <p>點選第 1 次轉動的輪盤色塊形成樹狀圖第一層 點選第 2 次轉動的輪盤色塊，完成整個樹狀圖。</p>													
9.	<p><b>3-2 觀察記錄 3</b></p> <p>分別點選左圖中的兩次黃色、兩次藍色、一藍一黃等按鈕將樹狀圖中的 36 種情況進行分類並記錄於下表：</p>	<p>分別點選左圖中的兩次黃色、兩次藍色、一藍一黃等按鈕將樹狀圖中的36種情況進行分類並記錄於下表：</p> <table border="1" data-bbox="938 1191 1474 1469"> <thead> <tr> <th>結果</th> <th>種類數</th> <th>機率</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>2次黃色</td> <td>9</td> <td><math>\frac{9}{36}</math></td> </tr> <tr> <td>2次藍色</td> <td>9</td> <td><math>\frac{9}{36}</math></td> </tr> <tr> <td>1藍1黃</td> <td>18</td> <td><math>\frac{18}{36}</math></td> </tr> </tbody> </table>	結果	種類數	機率	2次黃色	9	$\frac{9}{36}$	2次藍色	9	$\frac{9}{36}$	1藍1黃	18	$\frac{18}{36}$
結果	種類數	機率												
2次黃色	9	$\frac{9}{36}$												
2次藍色	9	$\frac{9}{36}$												
1藍1黃	18	$\frac{18}{36}$												
10.	<p><b>3-3 問題探索 3</b></p> <p>請根據左方的樹狀圖，回答下列問題：</p> <p>(1) 轉動 1 回合（轉動 2 次）可能的結果會有幾種？</p> <p><input type="checkbox"/> 6      <input type="checkbox"/> 12      <input checked="" type="checkbox"/> 36</p> <p><u>錯誤答案回饋</u>：請對照左方樹狀圖</p> <p>(2) 結果為 1 藍 1 黃的情形有幾種？</p> <p><input type="checkbox"/> 9      <input type="checkbox"/> 12      <input checked="" type="checkbox"/> 18</p> <p><u>錯誤答案回饋</u>：請對照左方樹狀圖</p> <p>(3) 下列何者為出現 1 藍 1 黃的機率？</p>													

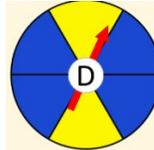
$\frac{1}{2}$       $\frac{1}{3}$       $\frac{1}{4}$

錯誤答案回饋：機率 =  $\frac{\text{出現次數}}{\text{總次}}$

11. 4-1 實驗操作 4A

猜猜看，你認為轉動一回合（轉動 2 次），出現 1 次藍色 1 次黃色的機率會接近下列哪一個值？

$\frac{1}{3}$       $\frac{2}{3}$       $\frac{2}{9}$       $\frac{4}{9}$



每一回合轉 2 次



挑戰俄羅斯輪盤

現在將輪盤換成【轉盤D】

每回合需連續轉動 2 次【轉盤D】

轉動前要先猜測轉動 2 次的結果並於押注區選取  
試回答 實驗操作 4A 的問題

12. 4-2 實驗操作 4B

(1)先預測接下來的回合會出現的結果（2 次黃色、2 次藍色、1 藍 1 黃），並於押注區選取。

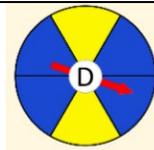
(2)按下「轉動 1 回合」按鈕，取得結果。

(3)重複步驟 1~2，完成共 10 個回合。

觀察記錄 4

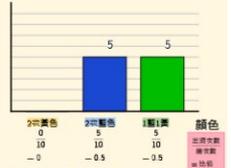
將輪盤轉動 10 回合後的結果記錄於下方表格。

結果	回合數	比值
2次黃色	0	0
2次藍色	2	0.2
1藍1黃	8	0.8



已轉動回合數：10 回合  
每一回合轉 2 次

累積次數



我的押注	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	合計
兩次黃色	藍	藍	黃	黃	藍	藍	藍	藍	藍	藍	2次黃：0 回合
兩次藍色	藍	藍	藍	藍	藍	藍	藍	藍	藍	藍	2次藍：5 回合
一藍一黃	藍	藍	藍	藍	藍	黃	黃	藍	藍	藍	1藍1黃：5 回合
得分	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	得分：5 分

13. 4-3 觀察記錄 4

將輪盤轉動 10 回合後的結果記錄於下方表格。

將輪盤轉動 10 回合後的結果記錄於下方表格。

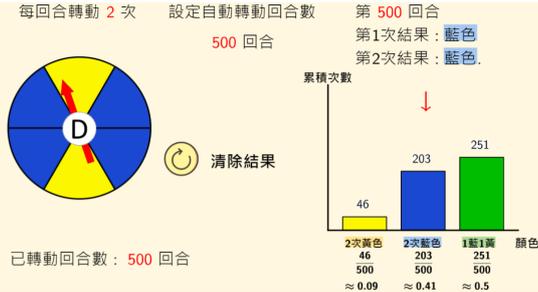
結果	回合數	比值
2次黃色	0	0
2次藍色	5	0.5
1藍1黃	5	0.5

14. 4-3 問題探索 4

你剛剛認為轉動一回合（轉動 2 次），出現 1 藍 1 黃的機率是  $\frac{2}{9}$ ，現在你認為出現 1 藍 1 黃的機率會接近下列哪一個值？

$\frac{1}{3}$       $\frac{2}{3}$       $\frac{2}{9}$       $\frac{4}{9}$

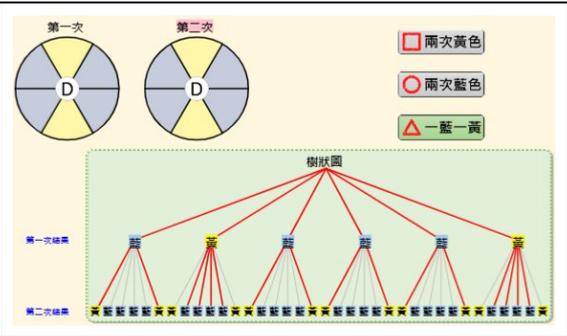
回饋：讓我們多轉幾回合，驗證看看你的想法吧！

<p>15. 5-1 實驗操作 5</p> <p>(1)預測一下【輪盤 D】轉動 500 回合後，各情況出現的回合數：2 次黃色【   】回合 2 次藍色【   】回合 1 藍 1 黃【   】回合</p> <p>(2)請轉動 500 回合並記錄。</p>													
<p>16. 5-2 觀察記錄 5</p> <p>將【輪盤 D】轉動 500 回合的結果記錄於下方表格。</p>	<p>將【輪盤 D】轉動 500 回合的結果記錄於下方表格。</p> <table border="1" data-bbox="941 571 1476 795"> <thead> <tr> <th>結果</th> <th>回合數</th> <th>比值</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>2次黃色</td> <td>46</td> <td>0.09</td> </tr> <tr> <td>2次藍色</td> <td>203</td> <td>0.41</td> </tr> <tr> <td>1藍1黃</td> <td>251</td> <td>0.5</td> </tr> </tbody> </table>	結果	回合數	比值	2次黃色	46	0.09	2次藍色	203	0.41	1藍1黃	251	0.5
結果	回合數	比值											
2次黃色	46	0.09											
2次藍色	203	0.41											
1藍1黃	251	0.5											
<p>17. 5-2 問題探索 5A</p> <p>你剛剛認為轉動一回合（轉動 2 次），出現 1 藍 1 黃的機率是 <math>\frac{2}{9}</math>，現在你認為出現 1 藍 1 黃的機率會接近下列哪一個值？</p> <p><input type="checkbox"/> <math>\frac{1}{3}</math>    <input type="checkbox"/> <math>\frac{2}{3}</math>    <input type="checkbox"/> <math>\frac{2}{9}</math>    <input checked="" type="checkbox"/> <math>\frac{4}{9}</math></p> <p><u>錯誤答案回饋</u>：讓我們多轉幾回合，驗證看看你的想法吧！</p>													
<p>18. 5-3 問題探索 5B</p> <p>請想想下列各種預測「玩【轉盤 D】一回合，出現 1 藍 1 黃的機率」之方式哪幾個是方式比較合理呢？</p> <p><input type="checkbox"/>以剛才玩【轉盤 A】10 回合的結果來判斷 <u>錯誤答案回饋</u>：用【轉盤 A】來判斷似乎不太合適，同時轉動的回合數也太少了！請再想想看</p> <p><input type="checkbox"/>以剛才玩【轉盤 A】500 回合的結果來判斷 <u>錯誤答案回饋</u>：同上</p> <p><input type="checkbox"/>以剛才玩【轉盤 D】10 回合的結果來判斷 <u>錯誤答案回饋</u>：用【轉盤 D】來判斷沒錯，但轉動的回合數太少了！請再想想看</p> <p><input checked="" type="checkbox"/>以剛才玩【轉盤 D】500 回合的結果來判斷</p>													

19. 6-1 實驗操作 6

(1)點選第 1 次轉動的輪盤色塊形成樹狀圖第一層

(2)點選第 2 次轉動的輪盤色塊，完成整個樹狀圖。



20. 6-2 觀察記錄 6

分別點選左圖中的兩次黃色、兩次藍色、一藍一黃等按鈕將樹狀圖中的 36 種情況進行分類並紀錄於下表：

分別點選左圖中的兩次黃色、兩次藍色、一藍一黃等按鈕將樹狀圖中的 36 種情況進行分類並紀錄於下表：

結果	種類數	機率
2次黃色	4	$\frac{4}{36}$
2次藍色	16	$\frac{16}{36}$
1藍1黃	16	$\frac{16}{36}$

21. 6-3 問題探索 6

請根據左方的樹狀圖，回答下列問題：

(1)轉動 1 回合（轉動 2 次）可能的結果會有幾種？

6     12     36

錯誤答案回饋：請對照左方樹狀圖

(2)結果為 1 藍 1 黃的情形有幾種？

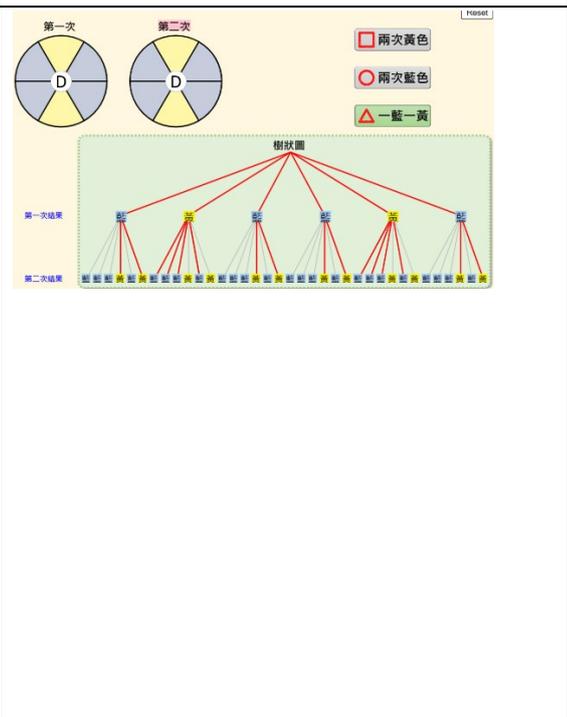
4     8     16

錯誤答案回饋：請對照左方樹狀圖

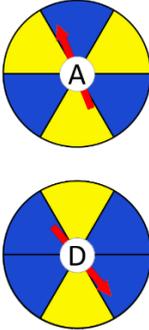
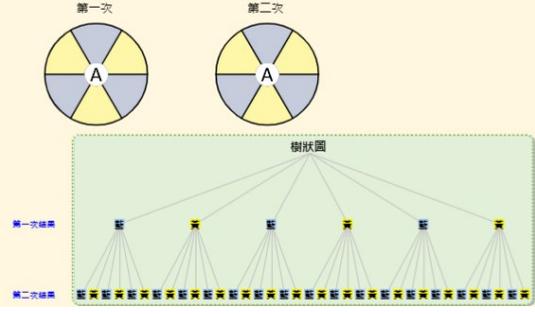
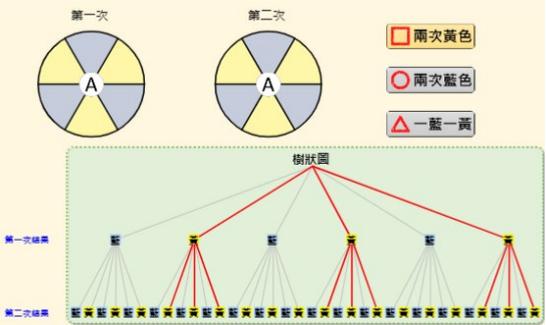
(3)下列何者為出現 1 藍 1 黃的機率？

$\frac{1}{9}$       $\frac{2}{9}$       $\frac{4}{9}$

錯誤答案回饋：機率 =  $\frac{\text{出現次數}}{\text{總次}}$



四、 活動 4：利用機率解決情境問題

<p>編號</p>	<p style="text-align: center;">活動階段目標：</p> <p>透過真實情境的問題，考驗學生轉化建模的能力，檢核是否能整合之前學習歷程中習得的概念。</p>													
<p>1.</p>	<p><b>情境：</b>如果你要讓老師來下注，當老師押錯了，你就能在榮譽卡記 1 點，老師很聰明，玩 180 回點都會押注在機率最大的同一區，若集滿 100 點，你就能換麥當勞乙份。</p>	 <p>如果你要讓數學老師來下注，當老師押錯了，你就能在榮譽卡記 1 點。老師很聰明，玩 180 回合都會押注在機率最大的同一區。若集滿 100 點，就能換麥當勞乙份。</p> 												
<p>2.</p>	<p><b>1-1 實驗操作 1</b></p> <p>請根據左方【轉盤 A】的樹狀圖回答下列問題</p> <p>(1) 左方的樹狀圖層數有【   】層</p> <p>(2) 第一層出現【   】次藍色，【   】次黃色</p> <p>(3) 第二層出現【   】次藍色，【   】次黃色</p> <p><u>錯誤答案回饋</u>：請再仔細觀察結果中藍色和黃色出現的次數</p>													
<p>3.</p>	<p><b>1-2 觀察記錄 1</b></p> <p>【轉盤 A】轉動 1 回合（2 次）出現的機率，機率最高的是</p>  <p><u>錯誤答案回饋</u>：請再仔細觀察樹狀圖中各情況出現的次數並算出其機率</p>	<p>【轉盤 A】轉動 1 回合（2 次）出現的機率</p> <table border="1" data-bbox="901 1265 1444 1456"> <thead> <tr> <th>種類數</th> <th>2次黃色</th> <th>2次藍色</th> <th>1藍1黃</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>機率</td> <td><math>\frac{9}{36}</math></td> <td><math>\frac{9}{36}</math></td> <td><math>\frac{18}{36}</math></td> </tr> <tr> <td>機率最高的是</td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input checked="" type="checkbox"/></td> </tr> </tbody> </table>	種類數	2次黃色	2次藍色	1藍1黃	機率	$\frac{9}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{18}{36}$	機率最高的是	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
種類數	2次黃色	2次藍色	1藍1黃											
機率	$\frac{9}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{18}{36}$											
機率最高的是	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>											

4. 2-1 實驗操作 2

點擊 自動轉動 按鈕模擬【轉盤 A】轉動 180 回合

「按清除結果，可以重複做 180 回合實驗」

5. 2-2 觀察記錄 2

依據左方【轉盤 A】的模擬轉動 180 回合的結果完成下表

種類數	2次黃色	2次藍色	1藍1黃
機率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
機率最高的是			✓
出現次數	49	44	87
比值	0.27	0.24	0.48

6. 2-3 問題探索 1

【轉盤A】模擬轉動180回合的結果

種類數	2次黃色	2次藍色	1藍1黃
機率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
出現次數	44	49	87
比值	0.24	0.27	0.48

根據上表，你認為老師最可能下注在下列哪一種情況？

(1)  2 次黃色     2 次藍色     1 黃 1 藍

錯誤答案回饋：老師會選擇機率最高的情況下注喔！

(2) 若老師真的下注在 1 藍 1 黃，老師會贏幾個回合？

44     49     87

錯誤答案回饋：老師獲勝的回合數就是出現 1 藍 1 黃的回合數

(3) 你可以得到多少點數？

136     131     93     87

錯誤答案回饋：老師沒押中的就是你獲得的點數

(4) 根據上方模擬的結果，你認為是否有機會換到一份麥當勞套餐呢？

註：獲得 100 點才能換 1 份麥當勞套餐

可以  不行

錯誤答案回饋：那我們就來挑戰一次看看吧！點擊 [自動轉動](#) 按鈕

試一次後回饋：可惜沒辦法順利換到麥當勞套餐，接下來換成【轉盤 D】看看能否比較有機會能換到一份套餐？」

### 7. 3-1 實驗操作 3

請根據左方【轉盤 D】的樹狀圖回答下列問題

(1) 左方的樹狀圖層數有【   】層

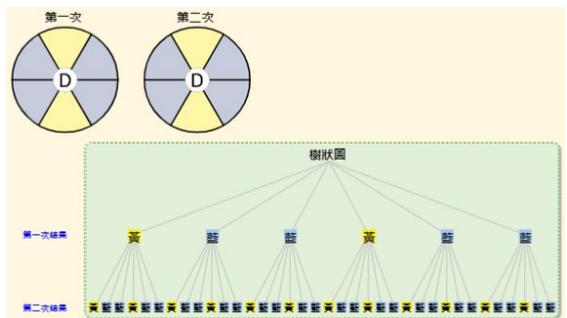
錯誤答案回饋：左方的樹狀圖看起來不只 1 層喔，請再觀察看看！

(2) 第一層出現【   】次藍色，【   】次黃色

錯誤答案回饋：請再仔細觀察結果中第一層藍色和黃色出現的次數

(3) 第二層出現【   】次藍色，【   】次黃色

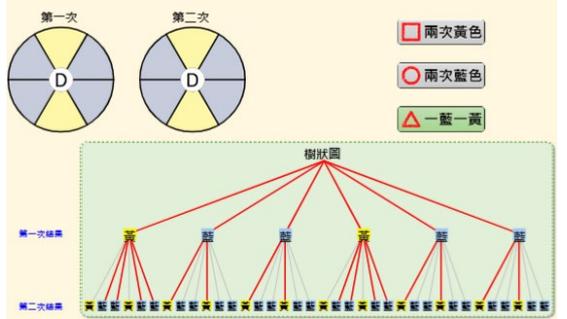
錯誤答案回饋：請再仔細觀察結果中第二層藍色和黃色出現的次數



### 8. 3-2 觀察記錄 3

【轉盤 D】轉動 1 回合 (2 次) 出現的機率

錯誤答案回饋：請再仔細觀察樹狀圖中各情況出現的次數並算出其機率



種類數	2次黃色	2次藍色	1藍1黃
機率	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$
機率最高的 是	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

9. 4-1 實驗操作 4  
 點擊 自動轉動 按鈕模擬【轉盤 D】轉動 180 回合  
 「按清除結果，可以重複做 180 回合實驗」

每回合轉動 2 次 設定自動轉動回合數 180 回合  
 第 180 回合  
 第 1 次結果：黃色  
 第 2 次結果：藍色  
 清除結果  
 已轉動回合數：180 回合

種類數	2次黃色	2次藍色	1藍1黃
出現次數	13	83	84
比率	≈ 0.07	≈ 0.46	≈ 0.47

10. 4-2 觀察記錄 4  
 依據左方【轉盤 D】的模擬轉動 180 回合的結果完成下表

種類數	2次黃色	2次藍色	1藍1黃
機率	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$
機率最高的是		✓	✓
出現次數	13	83	84
比值	0.07	0.46	0.47

11. 4-3 問題探索 2  
 根據上表，你認為老師最可能下注在下列哪一種情況？

(1)  2 次黃色  2 次藍色  1 黃 1 藍  
錯誤答案回饋：老師會選擇機率最高的情況下注喔！

(2) 若老師真的下注在 1 藍 1 黃，老師會贏幾個回合？  
 13  83  84  
錯誤答案回饋：老師獲勝的回合數就是出現 2 次藍色的回合數

(3) 你可以得到多少點數？  
 167  97  96  83  
錯誤答案回饋：老師沒押中的就是你獲得的點數

(4) 根據上方模擬的結果，你認為是否有機會換到一份麥當勞套餐呢？  
 註：獲得 100 點才能換 1 份麥當勞套餐  
 可以  不行  
回饋：那我們就來挑戰一次看看吧！  
 點擊 自動轉動 按鈕  
 「恭喜你換得一份麥當勞套餐」  
 「可惜沒有獲得，再試一次看看」

種類數	2次黃色	2次藍色	1藍1黃
機率	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$
機率最高的是		✓	✓
出現次數	13	83	84
比值	0.07	0.46	0.47

## 12. 5-1 問題探索 3

【轉盤A】模擬轉動180回合結果

種類數	2次黃色	2次藍色	1藍1黃
機率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
出現次數	49	44	87
比值	0.27	0.24	0.48

【轉盤D】模擬轉動180回合結果

種類數	2次黃色	2次藍色	1藍1黃
機率	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$
出現次數	13	83	84
比值	0.07	0.46	0.47

(1) 應該拿哪一種轉盤讓老師玩比較有機會吃到換麥當勞？

轉盤 A    轉盤 D    兩個轉盤機會一樣

回饋：待會就實際試試看是否拿【轉盤□】比較有機會贏老師

(2) 根據機率來押注一定能吃到麥當勞嗎？

- 一定，因為算出來的結果就是如此  
不一定，只能算出可能的次數，不能確定最後的結果

錯誤答案回饋：機率就是不確定性，沒辦法百分之百準確預測喔，

(3) 來試試你今天的手氣吧

選擇你要讓老師下注的轉盤：

轉盤 A    轉盤 D

「可以再玩一次」

**活動結束囉！**

**這個活動有讓你更瞭解機率的不確定性嗎？**

**跟老師和同學一塊討論看看吧！**

種類數	2次黃色	2次藍色	1藍1黃
出現次數	18	82	79

老師押中79回合

你得到 101 點

恭喜你! 點數足夠換到一份麥當勞套餐

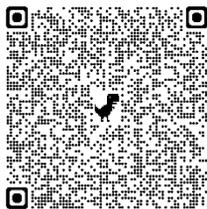
OK



# 教學影片二維碼

## 模組影片二維碼—數與量(N)

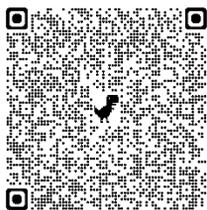
〔國小〕數與量  
倍數—年齡追追追



〔國小〕數與量  
體積公式—體積轉轉彎



〔國小〕數與量  
系統性的因數分解



〔國小〕數與量  
雞兔同籠—天使與魔鬼



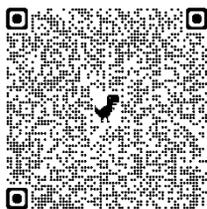
〔國小〕數與量  
比與比值—調好喝的果汁



〔國小〕數與量  
文氏圖—數字拉密



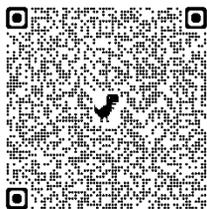
〔國小〕數與量  
重量感—秤重達人



〔國小〕數與量  
質數、合數—長方形數



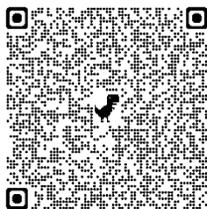
〔國小〕數與量  
四則計算併式—理財小達人



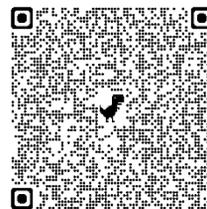
〔國小〕數與量  
比例推理—綠色市集



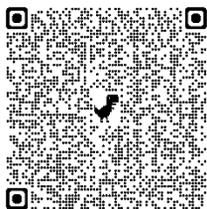
〔國小〕數與量  
數戰棋



〔國小〕數與量  
等值分數—分數變變變



〔國小〕數與量  
小數—小數拆合遊戲



〔國小〕數與量  
真分數、假分數與帶分數—分數心臟病



〔國小〕數與量  
因數、公因數—找到正方形



〔國中〕數與量  
正負數的加減—紅黑加減配

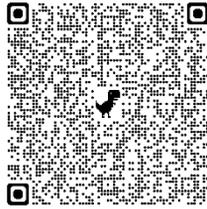


## 模組影片二維碼－空間與形狀(S)

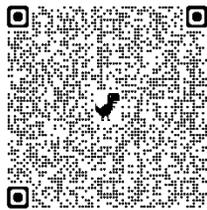
〔國小〕  
空間與形狀  
三角形內角和－三角形  
三內角拼成一個平角



〔國小〕  
空間與形狀  
方位－我在哪裡



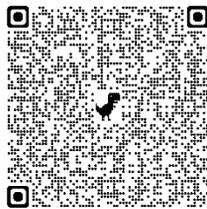
〔國小〕  
空間與形狀  
三角形分類



〔國小〕  
空間與形狀  
線對稱－體感線對稱



〔國小〕  
空間與形狀  
等值分數－尋找分數小  
精靈



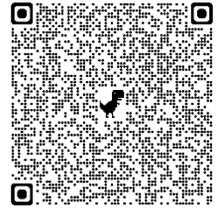
〔國小〕  
空間與形狀  
複合形體－拆解高手



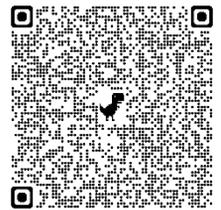
〔國小〕  
空間與形狀  
三邊構成三角形的條件  
－三角形邊長性質



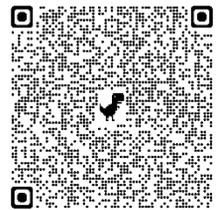
〔國小〕  
空間與形狀  
平面圖型形狀、面積與  
周長關係－比面積還是  
比周長



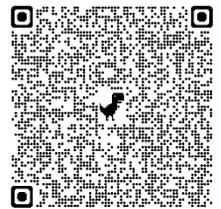
〔國小〕  
空間與形狀  
形體要素特徵－柱體與  
錐體



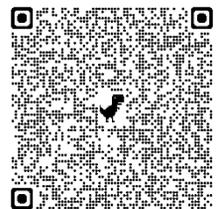
〔國小〕  
空間與形狀  
三角形的製作、自由分  
類和邊角特徵－三角形  
家族



〔國小〕  
空間與形狀  
三角形長度組成條件－  
佔地圍王

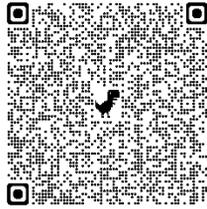


〔國小〕  
空間與形狀  
點對稱與線對稱－旋轉  
乾坤



# 模組影片二維碼—空間與形狀(S)

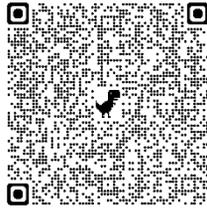
〔國中〕  
空間與形狀  
勾股定理—勾股摺學



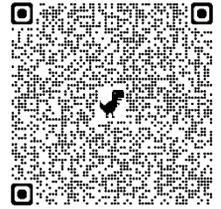
〔國中〕  
空間與形狀  
四邊形包含關係—脫形  
換骨 原形畢露



〔國中〕  
空間與形狀  
圖形中心的觀點—點心  
高手



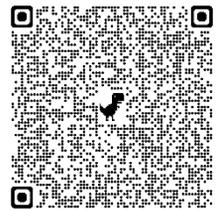
〔國中〕  
空間與形狀  
三角形全等性質—三角  
形城堡



〔國中〕  
空間與形狀  
拼版遊戲與畢氏定理



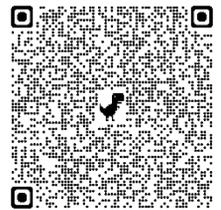
〔國中〕  
空間與形狀  
視圖推理—形體視圖的  
空間推理



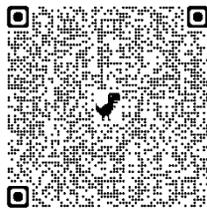
〔國中〕  
空間與形狀  
圖形的特性—當圓形遇  
上三角形



〔國中〕  
空間與形狀  
相似形—捕光捉影 如影  
隨形



〔國中〕  
空間與形狀  
對角線建構四邊形—偵  
四物語



〔國中〕  
空間與形狀  
縮放中心—縮放繪

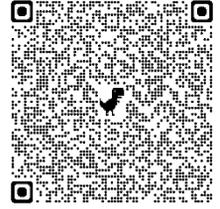


## 模組影片二維碼—代數(A)

〔國中〕  
代數  
加減對消、除法對消—  
數字神蹟



〔國中〕  
代數  
因式分解—地毯工廠



## 模組影片二維碼—幾何座標(G)

〔國中〕  
幾何座標  
圖形座標的關係—軍艦  
棋遊戲



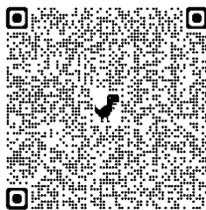
## 模組影片二維碼—資料與不確定性(D)

〔國中〕  
資料與不確定性  
機率—俄羅斯輪盤

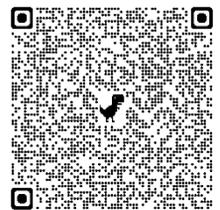


## 模組影片二維碼—107年奠基模組3D動畫

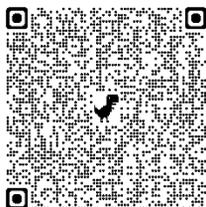
相似形  
捕光捉影 如影隨形



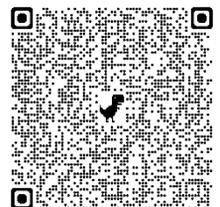
方位  
戰事無常



圖形座標的關係  
直角坐標軍艦棋



對稱  
不只老鼠會打洞



直角坐標  
方塊方程式

